



مجلة الرائد في الرياضيات



تمارين الحساب في البكالوريا بين يديك

الشعب: تقني رياضي+رياضيات

$$\alpha^p \equiv \beta^p [n]$$

BAC2021

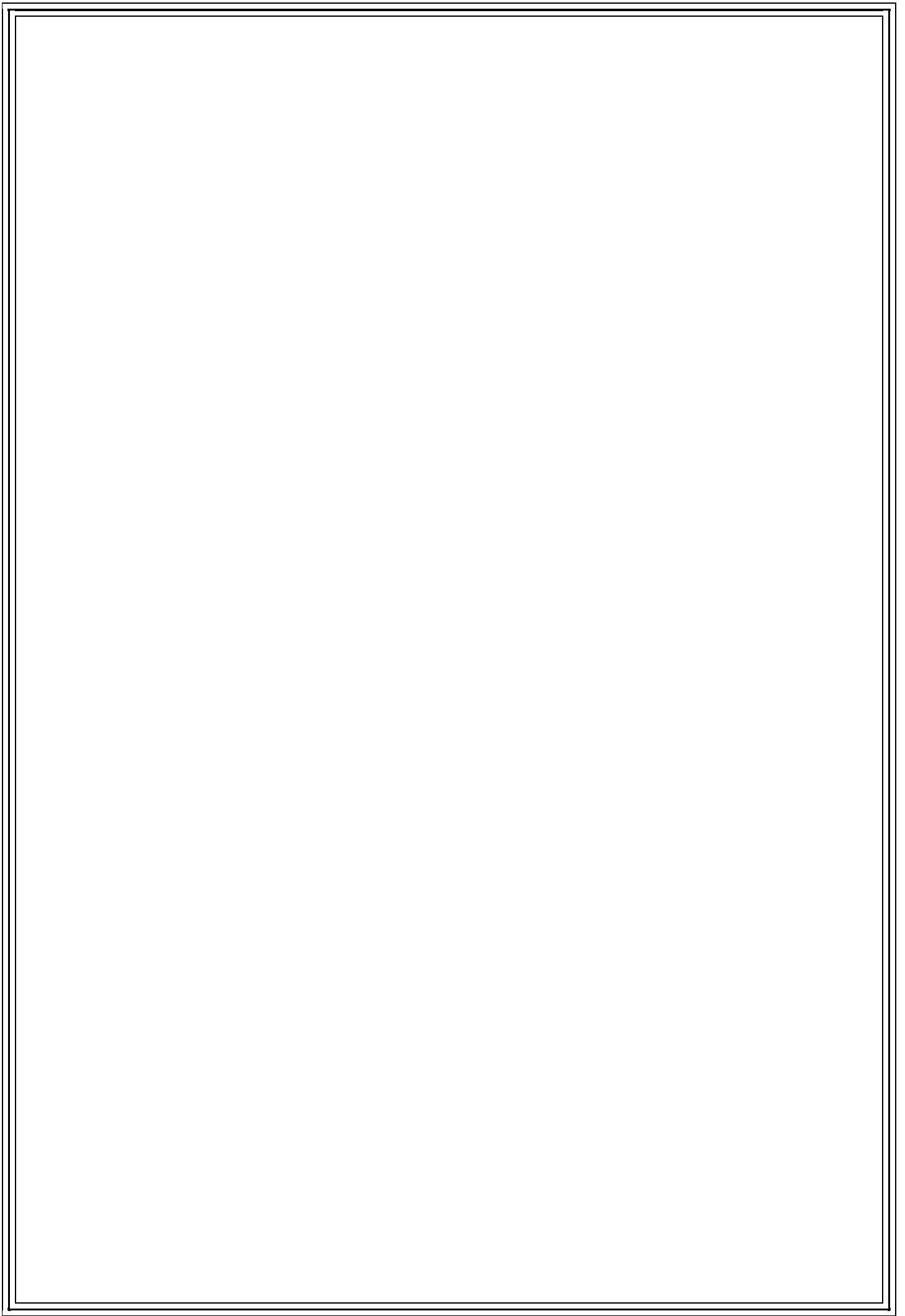
إعداد الأساتذة:

بالعبيدي م العربي

بوغزالة احمد

باي زواوي





مجلة الرائد في الرياضيات

تمارين الحساب في البكالوريا بين يديك

الشعب : تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

تدريبات متنوعة

الجزء الثاني

تمارين مقترحة

الجزء الثالث

بكالوريات النظام الجديد

العلوم التجريبية+تقني رياضي+رياضيات
(1)المواضيع ، (2)الحلول (المجلة المرفقة)

الجزء الرابع

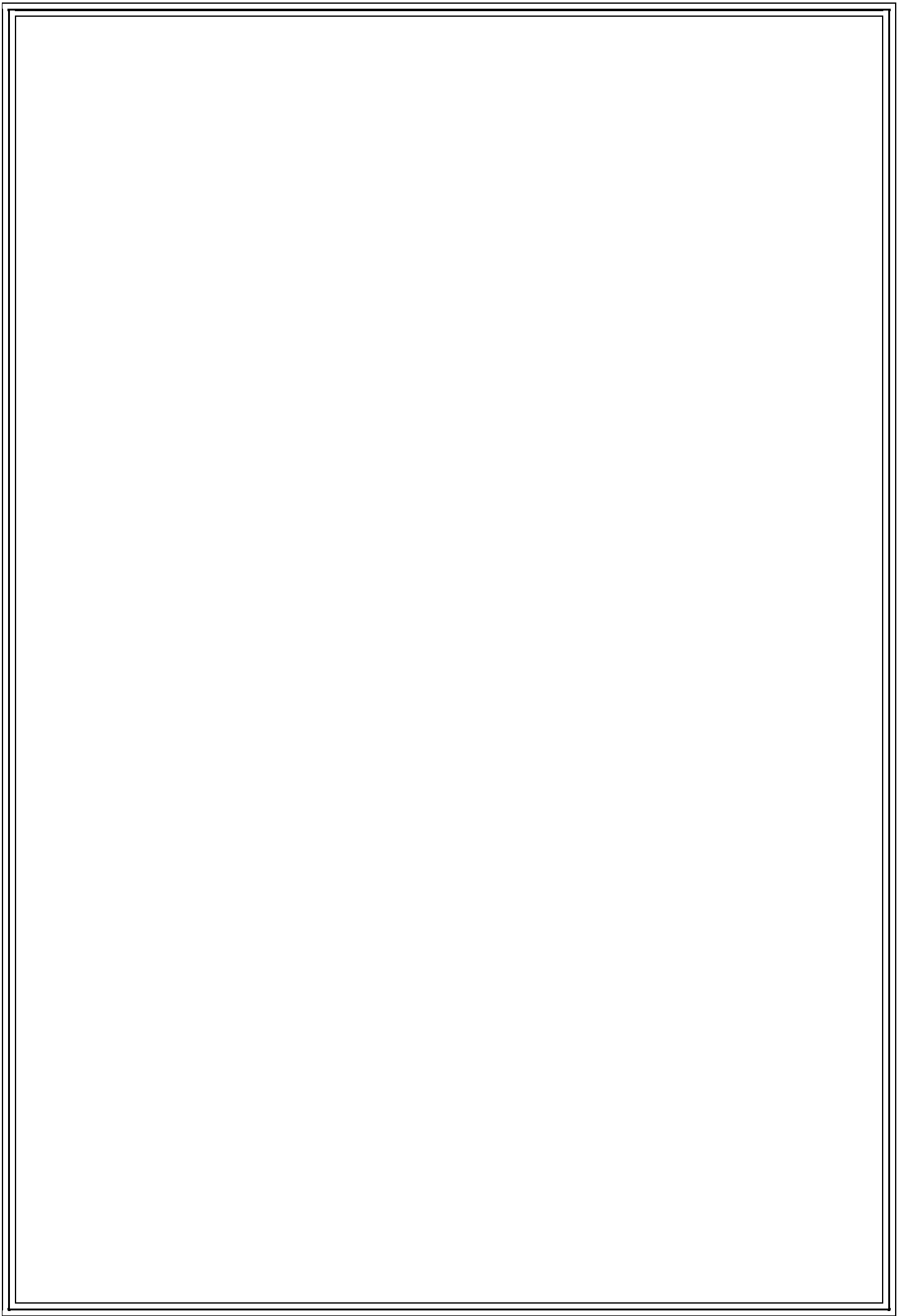
بكالوريات النظام القديم

علوم الطبيعة والحياة+علوم دقيقة

الجزء الخامس

بكالوريات اجنبية

BAC2021



الجزء الأول: تدريبات متنوعة

القسمة في المجموعة \mathbb{Z}

التمرين 01:

(1) عين مجموعة قواسم العدد 20

(2) عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث يكون $ab = 20$

استنتج كل الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعية حيث يكون $(x+1)(y-1) = 20$.

التمرين 02:

حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية في كل حالة :

(1) $x^2 - y^2 = 12$ ، (2) $x^2 + y^2 - 5 = 0$ ، (3) $xy = 3x + 2y$ ، (4) $5xy - y^2 = 49$

التمرين 03:

1- عين القواسم الطبيعية الممكنة للعدد 28.

2- نعتبر في \mathbb{N}^2 المعادلة (1): $x^2 - 4y^2 = 28$. عين حلول المعادلة (1)

التمرين 04:

1- عين مجموعة قواسم العدد 6

2- عين الأعداد الصحيحة n حيث: $n-4$ يقسم 6.

3- عين الأعداد الصحيحة n حيث: $n-4$ يقسم $n+2$.

4- عين الأعداد الصحيحة n حيث: $n+1$ يقسم $3n-4$

التمرين 05:

نعتبر الكسر $\frac{2n+17}{n+1}$ حيث n عدد صحيح نسبي يختلف عن -1

1- عين الاعداد الصحيحة النسبية n حتى يكون كل من البسط والمقام:

(أ) يقبلان القسمة على 3. ، (ب) يقبلان القسمة على 5 ، (ج) يقبلان القسمة على 15

2- ماهي قيم n حتى يكون الكسر عددا صحيحا نسبيا.

التمرين 06:

1- (أ) عين الأعداد الطبيعية n حيث: $PGCD(n, 150) = 6$

(ب) استنتج الاعداد الطبيعية الأقل من 50.

2- (أ) باستعمال خوارزمية اقليدس عين $PGCD(527, 713)$

(ب) هل المعادلة: $713x - 527y = 93$ تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 (اكتب المبرهنة المستعملة)

التمرين 07

- n عدد طبيعي، نعتبر العددين: $a = 3n + 1$ و $b = 5n - 1$
- 1- بين أن $PGCD(a, b)$ قاسم لـ 8.
 - 2- من أجل أي قيمة للعدد n يكون $PGCD(a, b) = 8$

التمرين 08

- 1) عين القاسم المشترك الأكبر d للعددين: 1440 و 276
- 2) استنتج مجموعة القواسم المشتركة للعددين: 1440 و 276
- 3) انطلاقاً من سلسلة القسمة المنجزة في خوارزمية إقليدس، اوجد عددين صحيحين u و v بحيث: $1440u + 276v = d$

التمرين 09:

- n عدد مكون من أربعة أرقام. باقي قسمة العدد 21685 على n هو 37 وباقي قسمة العدد 33509 على n هو 53. عين العدد n .

التمرين 10:

- عين في كل حالة الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشرطين المقترحين:
- 1) $\begin{cases} a + b = 72 \\ PGCD(a, b) = 9 \end{cases}$ (2)، $\begin{cases} ab = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases}$ (3)، $\begin{cases} a^2 - b^2 = 600 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases}$ (3)، $\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 2112 \\ PGCD(a, b) = 8 \end{cases}$ (3)

التمرين 11:

- 1- نعتبر المساواة التالية: $23 \times 51 + 35 = 1208$
دون استعمال القسمة أجب عن السؤالين التاليين مع التبرير
أ) ما هو باقي وحاصل القسمة الاقليدية للعدد (1208-) على 51؟
ب) ما هو باقي وحاصل القسمة الاقليدية للعدد 1208 على 23؟
- 2- ما هو العدد الطبيعي n الذي له نفس حاصل القسمة الاقليدية على كل من 152 و 147، وباقي قسمته عليهما هما على الترتيب 13 و 98؟

التمرين 12

- n عدد صحيح نسبي أكبر تماماً أو يساوي 3
ماهي قيم n حتى يكون الكسر $\frac{3n^2 + 4}{n - 2}$ عدداً طبيعياً.

الموافقات في المجموعة \mathbb{Z} وتطبيقاتها

التمرين 13:

- عين باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل القيم من 0 إلى 4 للعدد الطبيعي k .
1. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 5 للعدد 2^k من أجل كل عدد طبيعي k .
 2. استنتج باقي قسمة 17^{4k} على 5.
 3. بين أن العدد $2^{4k+3} + 17^{4k+2} + 3$ يقبل القسمة على 5.
- استنتج باقي قسمة $87^{49} + 61^{2008} - 2007^{1999}$ على 5.

التمرين 14:

- n عدد طبيعي (1. عين باقي قسمة العدد 6^{2n} على 7
- (2 ادرس تبعا لقيم n بواقي قسمة العدد 5^n على 7
- (3 عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $A_n = 3 + 6^{2n} + 5^n$ قابلا للقسمة على 7

التمرين 15:

- (1 ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 9
- (2 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $7^n + 3n - 1$ قابلا للقسمة على 9

التمرين 16:

- (1 عين كل الأعداد الطبيعية n بحيث يقبل العدد $2n^3 - n + 2$ القسمة على 7
- (2 اوجد قيم العدد الصحيح n التي تحقق: $n^2 + 3n - 6 \equiv 0 [11]$
- (3 اثبت انه من اجل كل عدد صحيح n يكون العدد $n^2 + 3n - 6$ غير قابل للقسمة على 121

التمرين 17:

- 1-أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n رقم احاد العدد 2^n ورقم احاد العدد 7^n
- ب) استنتج رقم احاد العدد $3548^9 \times 2537^{31}$.
- 2- عين كل الأعداد الطبيعية n بحيث: $5^{4n} + 5^{3n} + 5^{2n} + 5^n \equiv 0 [13]$

التمرين 18:

- (1 عين باقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل واحدة من القيم: 1، 2، 3، 4، 5، 6 للعدد الطبيعي n .
- (2 استنتج بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 7 من أجل كل عدد طبيعي n .
- (3 عين باقي القسمة الأقليدية على 7 للعدد $(3^{2020} + 10^{1440} + 9^{3n+2})$.

أنظمة التعداد

التمرين 19:

- 1) يكتب العدد الطبيعي n في التعداد الثنائي 1101101 .
ما هو أساس التعداد الذي يكتب فيه n كما يلي: 214 ؟
- 2) في أي أساس تعداد يكون $51 = 13 + 35$ ؟ - أكتب المساواة السابقة في النظام الثنائي

التمرين 20:

- أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من الأعداد الطبيعية تحقق المعادلة $45x - 28y = 130$ فإن x يكون زوجي و y يكون مضاعف للعدد 5.
- ب) عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $2\alpha\alpha3$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $5\beta\beta6$ في النظام ذي الأساس 7.

التمرين 21:

- في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي: $n = 1271x$.
- 1) عين قيمة x حتى يكون n قابلاً للقسمة على 8.
- 2) عين قيمة x حتى يكون n قابلاً للقسمة على 11

التمرين 22:

- 1) x و y عدنان طبيعيان غير معدومين.
- أوجد الأعداد الطبيعية التي تكتب yx في النظام العشري و xy في النظام ذي الأساس 7.

التمرين 23:

- 1- نعتبر العدنان الطبيعيان $a = 413^{(5)}$ و $b = 102^{(3)}$
- أ) اكتب كلا من a و b في النظام العشري.

- ب) احسب في النظام ذو الأساس 7 كلا من العددين: $a + b$ و $a \times b$
- 2- عين العدد الطبيعي x في الحالتين التاليتين: أ) $12^{(x)} \times 34^{(x)} = 452^{(x)}$ ، ب) $\overline{xxx}^{(9)} = \overline{52\alpha}^{(11)}$

التمرين 24:

- a, b و c أعداد طبيعية تنتمي للمجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ونعرف العدد $A = \overline{abc}^{(5)}$
- 1- بين أن: A يقبل القسمة على 4 إذا وفقط إذا كان العدد $a + b + c$ يقبل القسمة على 4
- 2- بين أن: A يقبل القسمة على 6 إذا وفقط إذا كان العدد $a - b + c$ يقبل القسمة على 6

التمرين 25:

- x و y عدنان طبيعيان ونعتبر العدد: $A = \overline{34x5y}$ المكتوب في النظام ذي الأساس 10
- عين القيم الممكنة للعددين x و y حتى يقبل العدد A القسمة على 36

الأعداد الأولية

التمرين 26:

1- نعتبر المعادلة (E): $19x - 6y = 1$

أ) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة (E)

ب) استنتج عدد حلول المعادلة (E) التي تحقق $2000 \leq x \leq 2100$

2- بين أن: $(n+3)$ و $(2n+3)$ أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان n ليس مضاعفاً 3

التمرين 27:

1- أ) اكتب مبرهنة بيزو ب) باستعمال مبرهنة بيزو برهن النتيجة التالية

نتيجة: نعتبر العددين الصحيحين غير المعدومين a و b

إذا كان $d = PGCD(a, b)$ فإنه توجد ثنائية (u, v) حيث: $au + bv = d$

2- n عدد طبيعي، نعتبر العددين: $a = 14n + 3$ و $b = 5n + 1$

أ) بين أن العددين a و b أوليان فيما بينهما ، ب) باستعمال السؤال (أ) استنتج $PGCD(87, 31)$

التمرين 28:

1- بين أن العددين 17 و 40 أوليان فيما بينهما

2- عين ثنائية (x, y) من الأعداد الصحيحة النسبية تحقق: $17x - 40y = 1$

التمرين 29:

1) نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول (x, y) من \mathbb{Z}^2 : $41x - 27y = 1$

أ) تحقق بواسطة نص مبرهنة من أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً.

ب) جد باستعمال خوارزمية اقليدس حلاً خاصاً للمعادلة (1)

2- أ) استنتج حلاً خاصاً للمعادلة: $41x - 27y = 5$ (2) ، ب) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (2)

التمرين 30:

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول (x, y) التالية $2045x - 64y = 1$... (1)

1) عيّن $PGCD(2045, 64)$. استنتج أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً في \mathbb{Z}^2 .

2) عيّن حلاً خاصاً للمعادلة (1). ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1).

التمرين 31:

لتكن S مجموعة الثنائيات (x, y) من الأعداد الصحيحة بحيث :

$$11x + 3y = 65 \dots\dots\dots (1)$$

1/ اوجد الثنائية (x, y) من S بحيث: $2x_0^2 - 3y_0 = 11$ ، ثم حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1)

2/ عيّن كل الثنائيات (x, y) من S بحيث: $(x > -5 \text{ و } y > -5)$

التمرين 32:

عين في كل حالة من الحالات التالية كل الثنائيات (x, y) التي تحقق الجملة المقترحة :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} ppcm(x, y) = 60 \\ xy = 180 \end{cases} \text{ مع } x \leq y \\ (2) \quad & \begin{cases} ppcm(x, y) = 12p \gcd(x, y) \\ x + y = 105 \end{cases} \text{ مع } x \leq y \\ (3) \quad & \begin{cases} 3ppcm(x, y) = xy \\ x^2 - y^2 = 405 \end{cases} \\ (4) \quad & \begin{cases} ppcm(x, y) = 100 \\ p \gcd(x, y) = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

التمرين 33:

- (1) ليكن n عددا صحيحا .
 أ) أثبت أن $n+1$ و $2n+3$ أوليان فيما بينهما .
 ب) أثبت أن $n+1$ و $3n+4$ أوليان فيما بينهما .
 ج) استنتج أن $n+1$ و $6n^2+17n+12$ أوليان فيما بينهما .
- (2) n عدد طبيعي غير معدوم ؛ نضع $a = 2n^2 + 4n + 1$ و $b = n + 2$.
 باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين 34:

- n عدد صحيح نسبي أكبر تماما من 1
 1- بين أن العددين n و $3n+1$ أوليان فيما بينهما
- 2- ماهي قيم n حتى يكون الكسر $\frac{455n}{3n+1}$ عددا صحيحا نسبيا.

الجزء الثاني: تمارين مقترحة

التمرين 35: مقترح وزاري 2008

- 1) أثبت أن العدد 251 عدد أولي.
- 2) حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية .
- أ) استنتج كل الأعداد الأولية التي مكعب كل منها يقسم العدد 2008.
- ب) عين الأعداد الطبيعية a و b بحيث: $m^3 + 35d^3 = 2008$ علما أن: $m = \text{PPCM}(a; b)$ و $d = \text{PGCD}(a; b)$.

التمرين 36:

- 1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
- 2- أ- نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$. بين أن: $4S_n = 5^{n+1} - 1$.
ب- ليكن a عدد طبيعي، بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$.
ج- أستنتج باقي قسمة S_{2016} على 7.

3. نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلتين: $(E_0): 5^n x - S_n y = 0$ و $(E): 5^n x - S_n y = 7$
أ- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون S_n و 5^n أوليان فيما بينهما ثم حل المعادلة (E_0)
ج- بين أن حلول (E) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $x = 35 + kS_n$ و $y = 28 + k5^n$ و $k \in \mathbb{Z}$
ثم حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ الجملة
$$\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ \text{PGCD}(x, y) = 7 \end{cases}$$

التمرين 37:

- 1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11
استنتج باقي قسمة العدد: $10 \times 1434^{31} - 2015^{10n+4}$ على 11
- 2) عين الأعداد الصحيحة x التي تحقق: $x^2 + 2x + 9 \equiv 0[11]$
- استنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد: $5 \times 9^{4n+1} + 2^{2n+1} - 2$ مضاعفا لـ 11
- 3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $17^{4n+1} + 3 \times 9^{2n}$ يقبل القسمة على 5.
استنتج باقي القسمة على 55 للعدد: $187 \times 17^{4n} + 11 \times 3^{4n+1} + 60 \times 4^{5n-1}$

التمرين 38:

- n عدد طبيعي، نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث $a = 8n + 1$ و $b = 7n + 1$

1) بين أن العددين a و b أوليين فيما بينهما.

2) نعتبر المعادلة : $23x - 26y = 1$ (E) حيث x و y عددان صحيحان.

أ) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E).

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E).

3) استنتج الأعداد الطبيعية a حيث : $\begin{cases} 0 \leq a \leq 25 \\ 23a \equiv 1[26] \end{cases}$

التمرين 39:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 10u_n + 81$.

$u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 10u_n + 81$.

1. احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 10^{n+1} - 9$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n + 8 = 9 + 9 \times 10 + 9 \times 10^2 + \dots + 9 \times 10^n$.

ج) استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، كتابة العدد u_n في النظام العشري.

3. أ) بين أن u_2 عدد أولي.

ب) بين أن u_n لا يقبل القسمة على كل من 2 و 3 و 5.

4. عين قيم العدد الطبيعي n ، التي يقبل من أجلها العدد u_n القسمة على 7.

5. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \equiv 2 - (-1)^n [11]$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على 11.

التمرين 40:

1) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $3x - 2y = 1$ (E)

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم أ) بين أن الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حلا للمعادلة (E).

ب) استنتج أن العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ أوليان فيما بينهما.

3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n + 1$ و $21n + 4$.

أ) بين أن $d = 1$ أو $d = 13$. ب) بين أن $n \equiv 6[13]$ يكافئ $d = 13$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n و $n \geq 2$

نضع : $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

أ) بين أن A و B قابلا للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة \mathbb{Z} .

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 41:

1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 580 ، 1885
2. α عدد صحيح . نعتبر المعادلة (1) $1885x - 580y = \alpha$
- أوجد الشرط اللازم والكافي الذي يحقته α حتى تقبل المعادلة (1) حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
3. نفرض فيما يلي أن : $\alpha = 1305$
- حل المعادلة (1)
- أوجد الحلول (x, y) بحيث يكون العدد x قاسما للعدد y .

التمرين 42:

- نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $32x - 7y = 185$ (E) .
- (1) بين أنه من أجل كل حل (x, y) للمعادلة (E) : $4x \equiv 3[7]$.
 - (2) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) .
 - (3) n عدد طبيعي يكتب $2\alpha 8\beta$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $5\alpha\beta\beta$ في النظام ذي الأساس 7
أ) عين العددين α و β .
ب) أكتب n في النظام العشري .
4. أ) تحقق أن العدد 2017 أولي .
ب) عين العدد الطبيعي a بحيث يكون العدد $(a^2 - 2017)$ مربعا لعدد طبيعي يطلب تعيينه

التمرين 43:

- (1) عيّن الثنائيات $(a; b)$ من \mathbb{N}^2 حيث : $PGCD(a; b) = 48$ و $PPCM(a; b) = 2160$.
- (2) عيّن الأعداد الحقيقية x التي تحقق : $9x \equiv 17[5]$.
- (3) إستنتج مما سبق حلول المعادلة $432x - 240y = 816$ ، حيث x و y عددان صحيحان .
- (4) n عدد طبيعي باقي قسمته على 9 هو 2 ، و باقي قسمته على 5 هو 3 :
أ) بيّن أن باقي قسمة n على 45 هو 17 .
ب) إستنتج قيمة n علما أنه محصور بين 1980 و 2025 .
- (5) أ) حلل 2016 إلى جداء عوامل أولية ، ثم جد الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2016
ب) في أي نظام تعداد يكتب 2018 على الشكل : $\overline{1202}^x$.

التمرين 44:

- (1) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $3x - 2y = 1$ (E)
- (2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . أ) بين أن الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حلا للمعادلة (E) .
ب) استنتج أن العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ أوليان فيما بينهما .

- (3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$.
 (أ) بين أن $d=1$ أو $d=13$. (ب) بين أن $n \equiv 6 [13]$ يكافئ $d=13$.
 (4) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ نضع : $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$ و $A = 21n^2 - 17n - 4$.
 (أ) بين أن A و B قابلان للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة \mathbb{Z} .
 (ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين 45:

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 3^n على 5 .
 استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعددين $(1439)^{2018}$ و $(1962)^{1954}$ على 5 .
 (2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن العدد :
 $(1439)^{2018} + (1962)^{1954} - 2 \times (2018)^{4n+3}$ مضاعف لـ 5
 (3) عين الأعداد الطبيعية n حتي يقبل العدد $3^{4n+1} + 2017^n - 6$ القسمة على 5 .

التمرين 46:

- (1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .
 (2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $33^{16n+2} - 2 \times 109^{8n+1} - 11 \equiv 0 [10]$.
 (3) عين الأعداد الطبيعية n حيث : $7 \times 3^{n+1} - 1 \equiv 0 [10]$ و $10 < n \leq 25$.
 (4) A عدد مكتوب بـ : $\overline{xx0xx02}$ في النظام ذي الأساس 3 و مكتوب بـ : $\overline{y612}$ في النظام ذي الأساس 7
 أ- عين كلا من x و y . ب- أحسب العدد A في النظام العشري .
 ج- أكتب العدد A في النظام ذي الأساس 9 .

التمرين 47:

- نعتبر الأعداد الصحيحة N التي تحقق الجملة : $(S) \begin{cases} N \equiv 5 [13] \\ N \equiv 1 [17] \end{cases}$
 (1) تحقق أن العدد 239 حل للجملة (S) .
 (2) أثبت أن العدد N يكتب على الشكل $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ ، حيث x و y عدنان صحيحان نسبيا يحققان $17x - 13y = 4$.
 (3) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $17x - 13y = 4$ ، للمجهولين الصحيحين x و y .
 (4) استنتج أنه يوجد عدد صحيح k يحقق $N = 18 + 221k$ ، ثم استنتج حلول الجملة (S) .

الجزء الثالث: تمارين بكالوريات جزائرية

شعبة تقني رياضي

التمرين 48: 2020 م 1

- نعتبر المعادلتين $(E_1) 693x - 216y = 738...$ و $(E_2) 77x - 24y = 82...$ حيث x و y عدنان صحيحان
- 1) جد $\text{PGCD}(693; 216)$ واستنتج أن المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتان.
 - 2) تحقق أن الثنائية $(2; 3)$ حل للمعادلة (E_2) ثم أوجد حلولها في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
 - 3) جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق $|y - x| \leq 54$
 - 4) ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\beta 68\alpha$ في النظام ذي الأساس 9 ويكتب $1\alpha\beta 0\alpha$ في النظام ذي الأساس 6 حيث α و β عدنان طبيعيان.
- جد العددين α و β ، ثم اكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين 49: 2020 م 2

- 1- أ) ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.
- ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1$ على 5.
- 2- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = 3^{n+1} + 4$
- عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[5]$
- 3- نعتبر العدد الطبيعي b_n حيث $b_n = 7a_n + 5$.
- أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n
- ب) بين أن $a_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا $b_n \equiv 0[5]$
- ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدنان a_n و b_n أولين فيما بينهما.

التمرين 50: 2019

- 1) نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $(E) 5x - 3y = 1...$ حيث x و y عدنان صحيحان
- أ) تحقق أن الثنائية $(6n + 2; 10n + 3)$ حلا للمعادلة (E) حيث n عدد طبيعي.
- ب) أستنتج أن العدنان $10n + 3$ و $6n + 2$ أوليان فيما بينهما.
- 2) نضع: $a = 10n + 3$ و $b = 3n + 5$ واليكن d القاسم المشترك للعددين a و b
- أ) بين أن: $d = 1$ أو $d = 41$.
- ب) بين أنه إذا كان $d = 41$ فإن $n \equiv 12[41]$.
- 3) ليكن العدنان الطبيعيان $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$
- أ) بين أن العدنان A و B يقبلان القسمة على $2n + 3$.
- ب) جد وبدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 51: دورة 2017

- 1- بين أنه من أجل عدد طبيعي k : $4^{5k} \equiv 1[11]$.
- 2- استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.
- 3- بين أنه من أجل عدد طبيعي n العدد $(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1)$ يقبل القسمة على 11
- 4- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد: $(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ قابلاً للقسمة على 11

التمرين 52: 2017 الاستراكية

- 1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.
- 2- استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.
- 3- برهن أن: من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5.
- 4- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلاً للقسمة على 5.

التمرين 53: جوان 2016 الموضوع 1

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $6x - 7y = 19$ حيث x و y عددان صحيحان
- 1) جد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) حيث $x_0 = y_0$ ثم حل المعادلة (E)
 - 2) استنتج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق $\begin{cases} \lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6] \end{cases}$ ، ثم عين باقي قسمة العدد λ على 42
 - 3) عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x + y - 1| \leq 13$
 - 4- أ) ادرس بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7
ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{cases}$

التمرين 54: جوان 2015 الموضوع 1

- 1- أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد : $42 \times 138^{2015} + 2014^{2007} - 3$ على 13.
- 2- أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n + 6)8^{2n} [13]$
ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(5n + 1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0 [13]$

التمرين 55: جوان 2013 الموضوع 1

- x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $11x + 7y = 1$.
- 1- أ) عين $(x_0; y_0)$ ، حلول المعادلة (E) الذي يحقق : $x_0 + y_0 = -1$.

ب- استنتج حلول المعادلة (E).

$$\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases} \quad (2) \text{ a و b عددان طبيعيين و S العدد الذي يحقق:}$$

أ) بيّن أن $(a, -b)$ حل للمعادلة (E).

ب) ماهو باقي القسمة الأقليدية للعدد S على 77

التمرين 56: جوان 2012 الموضوع 1

- 1- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 11
- 2- ماهو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 ؟
- 3- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد: $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012}$ يقبل القسمة على 11
- 4- عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد: $2011^{2012} + 2n + 2$ يقبل القسمة على 11

التمرين 57: جوان 2012 الموضوع 2

نسمي (S) الجملة التالية: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح

1- بيّن أن العدد 153 حل للجملة (S).

2- إذا كان x_0 حلا لـ (S)، بين أن: x حلا لـ (S) ، يكافئ $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$

3- حل الجملة (S).

- 4- يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب.
- إذا علمت أن عدد الكتب التي بجوزته محصورة بين 500 و 600 كتابا، ماعدد هذه الكتب ؟

التمرين 58: جوان 2011 الموضوع 2

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1- تحقق أن: $4 \equiv -3[7]$ ثم بيّن أن: $A_3 \equiv 6[7]$

2- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 2^n و 3^n على 7

3- بيّن أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7.

واستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7

التمرين 59: جوان 2010 الموضوع 1

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كمايلي :

$n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي .

- 1- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 .
- 2- عين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 .
- استنتج العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15 .
- 3- نأخذ : $\alpha = 4$ أكتب العدد n في النظام العشري .

التمرين 60: جوان 2010 الموضوع 2

- 1- عين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 10^n على 13
- 2- تحقق أن : $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0 [13]$.
- 3- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0 [13]$.

التمرين 61: جوان 2009 الموضوع 2

- 1- حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$.
- 2- نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق : $f(0) = 1$. عين عبارة $f(x)$.
- 3- n عدد طبيعي . أ) أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n .
ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$.
- 4- أ) أحسب بدلالة n ، المجموع $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$.
ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

التمرين 62: جوان 2008 الموضوع 1

- n عدد طبيعي أكبر من 5 .
- 1- a و b عددان طبيعيين حيث : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$
 - أ- ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b
 - ب- بين لأن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ ضاعفا للعدد 7 .
 - ج- عين قيم n التي من أجلها $\text{PGCD}(a; b) = 7$.
 - 2- نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$

أ- بيّن أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$

ب- عين تبعا لقيم n وبدلالة n ، $\text{PGCD}(p; q)$.

التمرين 63: جوان 2008 الموضوع 2

المعادلة ذات المجهول الصحيحين x و y : (1) $4x - 9y = 319$

(1) تأكد أن الثنائية $(82; 1)$ حلا للمعادلة (1). ثم حل المعادلة (1)

(2) عين الثنائيات $(a; b)$ الصحيحة حلول المعادلة : (2) $4a^2 - 9b^2 = 319$

استنتج الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

شعبة الرياضيات

التمرين 64: دورة 2020م1

- ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1.
- نعتبر الأعداد الطبيعية a, b, c حيث: $a=4n+1, b=6n+1, c=3n+2$
- (1) أثبت أن العددين a, b أوليان فيما بينهما.
 - (2) نسمي α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c
 - أثبت أن α يقسم 5، ثم عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\alpha=5$
 - (3) نسمي β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و cb
 - (أ) اثبت أن α يقسم β .
 - (ب) أثبت أن العددين β و b أوليان فيما بينهما، ثم استنتج أن $\beta=\alpha$.
 - (4) نعتبر العددين الطبيعيين A و B حيث: $A=4n^2-3n-1$ و $B=18n^2-3n^2-13n-2$
 - (أ) بين أن كلا من العددين A و B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$.
 - (ب) نضع: $d=\text{PGCD}(A;B)$ عبر حسب قيم α عن d بدلالة n . (لاحظ أن $bc=18n^2+15n+2$)

التمرين 65: دورة 2020 م2

- (1) حل المعادلة: $3x-5y=2$ ذات المجهول (x,y) حيث x و y عددان صحيحان.
- (2-أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7.
- (ب) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11.
- (ج) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $14 \cdot 4^n + 11 \cdot 9^n - 4 \equiv 0 [77]$
- (3) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم نضع: $u_n = 3 \cdot 4^n + 4 \cdot 9^n$ و $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{15n}$
- (أ) عبر عن S_n بدلالة n .
- (ب) أثبت أن S_n مضاعف للعدد 77.

التمرين 66: دورة 2018

- (1) α و β عددان طبيعيان بحيث:
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$
- عين العددين α و β ن ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.
- (2) عين كل الثنائيات الصحيحة (x,y) التي تحقق المعادلة: $1009x - 2017y = 1$.
- (3) عين الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة:
$$\begin{cases} a \equiv 2019 [2017] \\ a \equiv 2019 [1009] \end{cases}$$
- (4-أ) n عدد طبيعي، أدرس تبعا لقيم n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

(ب) L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الاساس 7 كمايلي: $L = \overline{111\dots1}$ مسرة 2018

عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 42L على 9.

التمرين 67: دورة 2017 م1

- 1- نعتبر المعادلة: $104x - 20y = 272 \dots (E)$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عددان صحيحان
 - أ- أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولاً.
 - ب- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) $\lambda - 2$ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta 01}$ في النظام الذي اساسه 4، ويكتب $\overline{1\alpha\beta 01}$ في النظام الذي اساسه 6 حيث α و β عددان طبيعان. عيّن α و β ثم أكتب λ في النظام العشري.
- 3- تحقق أن كلا من 2017 و 1009 عدد أولي، ثم عين الثنائيات $(a; b)$ من الاعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$ حيث: $d = \text{PGCD}(a; b)$ و $m = \text{PPCM}(a; b)$

التمرين 68: دورة 2017 م2

- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الاول: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 7u_n + 8$.
- 1- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$.
 - 2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - أ- احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S'_n و S_n .
 - ب- أستنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $18 \times S'_n = 7^{n+2} - 24n - 31$.
 - 3- أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5
 - ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلاً للقسمة على 5.

التمرين 69: الاستدراكية 2017

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الحقيقيين x و y حيث: $63x + 5y = 159 \dots (E)$.
- 1- تحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما ثم بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلولاً.
 - 2- برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)
 - 3- λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha 0\alpha}$ في النظام ذي الاساس 7 ويكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في النظام ذي الاساس 5 جد العددين الطبيعيين α و β ثم اكتب العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.
 - 4- أ) أدرس وحسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.
 - ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5 حيث $(x; y)$ حلول للمعادلة (E) و x عدد طبيعي.

التدريب 70: 2017 الاستراكية

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول u_0 حيث $u_0 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 4u_n + 1$

1- أ) بيّن أن: من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

ب) تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العددين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

ب) عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

3- عين من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم القاسم المشترك الأكبر للعددين $4^{n+1} - 1$ و $4^n - 1$.

4- أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية 4^n على 7.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرف ب: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$ القسمة على 7

التدريب 71: 2016 الموضوع 1

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$

1) أحسب u_1 و u_2 ، ثم استنتج قيمة الأساس q

2- نضع: $u_1 = e^4$ و $q = e^3$. أ) عبّر عن u_n بدلالة n

ب) نضع: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ احسب S_n بدلالة n

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n: a_n = n + 3$.

3- أ) بيّن أن: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$.

ب) عيّن القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$

ج) عيّن قيم العدد الطبيعي بحيث: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$

4) ادرس بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

5) نضع: $b_n = 3n \cdot a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$

عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون: $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

6) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7

التمرين 72: دورة 2016 الموضوع 2

- 1-أ) ادرس بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.
 ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف لـ 11
 2- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $7x - 3y = 8$ حيث x و y عدنان صحيحان
 أ) حل المعادلة (E).
 ب) d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E).
 - ما هي القيم الممكنة للعدد d .
 - عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.
 ج) عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0 [11]$

التمرين 73: دورة 2015 الموضوع 1

- 1-أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.
 ب) استنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد : $2015^{53} + 1954^{1962} + 1962^{1954}$ على 7.
 2-أ) بيّن أن العدد 89 أولي. ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832 .
 ج) بيّن أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.
 3) x و y عدنان طبيعيان غير معدومين قاسمهما المشترك الأكبر هو 2.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8 [22] \end{cases}$$
 عيّن x و y علما أن :
 4) a و b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .
 أ) باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن a أولي مع $c \times b$.
 ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n
 $PGCD(a; b^n) = 1$ (يرمز PGCD إلى القاسم المشترك الأكبر)
 ج) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962} .

التمرين 74: 2014 الموضوع 1

- 1) نعتبر المعادلة (E) : $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عدنان صحيحان.
 أ) أحسب $PGCD(2013; 1962)$. ب) استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلوًا.
 ج) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0 [6]$.
 د) استنتج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).
 2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حلا للمعادلة (E).
 أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d .
 ب) عيّن قيم العددين a و b حيث : $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a; b) = 18$.

التمرين 75: دورة 2013 الموضوع 1

1. n عدد طبيعي. نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

أ- بين أن : $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; 10)$

ب- ما هي القيم الممكنة للعدد $\text{PGCD}(\alpha; \beta)$.

ج- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = 5$

2. أ- ادرس، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0 [11] \\ n \equiv 2 [10] \end{cases}$

التمرين 76: 2013 الموضوع 2

1. أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n + 27 \equiv 0 [n+1]$

ب- عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية ، حيث : $(b - a)(a + b) = 24$

ج- أستنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2. α و β عددان طبيعيين مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل

$$\alpha = \overline{10141} \text{ و } \beta = \overline{3403}.$$

أ- اكتب العددين α و β في النظام العشري.

ب- عين الثنائية $(a; b)$ من \mathbb{N}^2 حيث: $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$

3. أ- جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434.

استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478

ب- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2013x - 1434y = 27$

التمرين 77: 2012 الموضوع 1

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2011x - 1432y = 31 \dots (1)$

1- أ-بين أن العدد 2011 أولي .

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس ، عين حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة (1) ، ثم حلا للمعادلة (1).

2-أ-عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الاقليدية للعدد 2011^{1432} على 7.

ب-عين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$

3-N عدد طبيعي يكتب $2\gamma\alpha\beta$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α ، β و γ بهذا

الترتيب تشكل حدودا لمتتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1).

عين α ، β و γ ثم أكتب N في النظام العشري.

التمرين 78: 2011 الموضوع 1

1) نعتبر المعادلة : $13x - 7y = -1 \dots (E)$ حيث x و y عددا صحیحان . حل المعادلة (E).

2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$

3) أدرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 7 و 13

4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب ، في نظام التعداد ذي الأساس 9 كمايلي : $\alpha 00 \beta 086$ حيث α و β عددا طبيعيا و $\alpha \neq 0$.

عين α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

التمرين 79: 2010 الموضوع 1

1- برهن أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13

2- أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين

$3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13.

3- عين حسب قيم n باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 13 واستنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$

أ- من أجل $p = 3n$ ، عين باقي القسمة الاقليدية للعدد A_p على 13

ب- برهن أنه من أجل $p = 3n + 1$ ، فإن A_p يقبل القسمة على 13

- ج- عيّن باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p=3n+2$
- 5- يكتب العددان a و b في نظام العددي الأساس 3 كمايلي:
- $$a = 1001001000 \text{ و } b = 1000100010000$$
- أ- تحقق أن a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري
- ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من a و b على 13.

التمرين 80: دورة 2010 الموضوع 2

1- نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة: (1) $7x + 65y = 2009$.

أ- بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.

ب- حل المعادلة (1).

2- أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

3- عيّن قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9.

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{6n} - 1$.

أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

ب- حل المعادلة: (2) $(7u_1)x + (u_2)y = 126567$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

ج- عيّن الثنائية $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$.

التمرين 81: 2009 الموضوع 1

x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس x بالشكل: $A = 5566$

1- أ- أنشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y

إذ علمت أن: $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$.

ب- أحسب x و y إذا علمت أن x أولي و أصغر من 12.

ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2- أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$$

التمرين 82: 2008 الموضوع 2

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $(E) \dots 3x - 21y = 78$

1-أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 .

ب) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$.
استنتج حلول المعادلة (E) .

2-أ) أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.
ب- عين الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 حلول المعادلة (E) وتحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

الجزء الثالث: بكالوريات النظام القديم

التمرين 83: دورة 1997 ع.دقيقة

- 1) جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 2490، 32785 و 2905
- 2) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة $7x + 6y = 79$ (لاحظ $72+7=79$)
- 3) اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه ، إذا علمنا أن ثمن بذلة اللاعب هو 2905 دج و ثمن بذلة اللاعب هو 2490 دج وعلمنا ان النادي دفع في المجموع 32785 دج ما هو عدد اللاعبين واللاعبات؟

التمرين 84: دورة 2001 ع.طبيعية

- 1) أثبت أن العددين 993 ، 170 أوليان فيما بينهما.
- 1- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) ذات المجهولين x و y حيث : $993x - 170y = 143 \dots (1)$
أ- عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) حيث: $x_0 + y_0 = 6$
ب- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1)
- 3) جد أصغر عدد طبيعي A بحيث يكون باقي قسمة $(A-1)$ على كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على التوالي

التمرين 85: دورة 1998 ع.طبيعية

- 1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث: $3x - 5 \equiv 0 [11]$
- 2) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $3x - 11y = 5 \dots (1)$
• حل هذه المعادلة (يمكن استعمال نتيجة السؤال الأول) .
- 3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين x و y
ماهي القيم الممكنة للعدد d إذا كان $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1)
- 4) عين الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة (1) حيث: $d = 5$

التمرين 86: دورة 2008 ع.طبيعية

- لتكن في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) $13x - 11y = 23 \dots (1)$
- 1- عين حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) حيث: $x_0 - y_0 = 1$ - استنتج مجموعة حلول المعادلة (1).
- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول (1) بحيث يكون: $-10 < x < 40$
- 2- نفرض أن x و y موجبان و d قاسمهما المشترك الأكبر - ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون: $d = 23$
- استنتج عندئذ الثنائية $(x; y)$ التي يأخذ من أجلها العدد x أصغر قيمة.

التمرين 87: دورة 1995 ع. طبيعية

- أ- حلل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية .
ب- عيّن كل الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 حيث: $x + 7y = 1995$ و $\text{PGCD}(x; y) = 19$

التمرين 88: دورة 1996 ع. دقيقة

- a, b, c أعداد طبيعية حيث : $1 \leq a \leq b \leq c$.
عيّن a, b, c والجداء abc علما أن في النظام ذي الأساس a يكون $b + c = \overline{46}$ و $bc = \overline{555}$.

التمرين 89: دورة 1997 ع. دقيقة

- (1) عين القاسم المشترك الأكبر للإعداد 1497 و 2994
(2) لتكن المعادلة (1) $1996x - 1497y = 3994$ حيث x و y عدنان صحيحان .
- أثبت أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ، ثم عين حلول المعادلة (1) .
- عين الحلول $(x; y)$ للمادلة (1) بحيث يكون: $x.y = 1950$

التمرين 90: دورة 1992 ع. دقيقة

- (1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 و 580
(2) α عدد صحيح . نعتبر المعادلة (1) $1885x - 580y = \alpha$.
- أوجد الشرط اللازم والكافي الذي يحمته α حتى تقبل المعادلة (1) حولا في \mathbb{Z}^2 .
(3) نفرض أن : $\alpha = 1305$ - حل المعادلة (1) . - أوجد الحلول $(x; y)$ بحيث يكون x قاسما للعدد y .

التمرين 91: دورة 1992 ع. دقيقة

- (1) حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة $18x + 4y = 84$.
ماهي الحلول $(x; y)$ لهذه المعادلة التي تحقق $x.y > 0$
(2) n عدد طبيعي يكتب $30\alpha\beta\gamma$ في النظام ذي الأساس 5 ويكتب $55\alpha\beta$ في النظام ذي الأساس 7 .
عيّن الأعداد الطبيعية α, β و γ ثم اكتب n في النظام العشري

التمرين 92: دورة 1990 ع. دقيقة

- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) $5x - 6y = 3$.
(1) أثبت أنه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن x مضاعف لـ 3 ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (1) .
(2) حل المعادلة (1) ثم استنتج حلول الجملة التالية $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$
(3) من بين الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 التي هي حلول للمعادلة (1)
ماهي الثنائيات $(x; y)$ التي تحقق $(x^2 - y^2) < 56$.

التمرين 93: دورة 1996. دقيقة

- 1) x و y عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما. أثبت أن العددين $(x+y)$ ، xy أوليان فيما بينهما
 2) α ، β عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما. عين α ، β حتى يكون: $15\alpha^2 - 229\beta = 30\beta$
 3) x و y عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما.
 عين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ التي تحقق: $15(x^2 + y^2) = 229(x + y)$

التمرين 94: دورة 1997. دقيقة

- 1) حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول $(x'; y')$: $9x' - 14y' = 13$ علماً أن $(3, 1)$ حلا لها.
 2) نعتبر \mathbb{Z}^2 المعادلة: $45x - 28y = 130$
 أ) بين أنه إذا كان $(x; y)$ حلا لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5.
 ب) حل هذه المعادلة.
 3) N عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha3$ في نظام تعداد أساسه 9 و $5\beta\beta6$ في نظام تعداد أساسه 7.
 عين α و β ثم أكتب N في النظام العشري

التمرين 95: دورة 2005. دقيقة

- α و β عدنان حيث: $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$ حيث $n \in \mathbb{N}$
 1- أ) برهن أن: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; n)$
 ب) استنتج القيم الممكنة للعدد $\text{PGCD}(\alpha; \beta)$
 2- a و b عدنان طبيعيان يكتبان في نظام التعداد ذي الأساس n كما يلي: $a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$
 أ) برهن أن العدد $(3n + 2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b
 ب) استنتج تبعا لقيم n أن: $\text{PGCD}(a; b) = 3n + 2$ أو $\text{PGCD}(a; b) = 2(3n + 2)$
 ج) عين α و β إذا علمت أن: $\text{PGCD}(a; b) = 41$.

التمرين 96: دورة 2007. دقيقة

- n عدد طبيعي حيث $n > 2$. نعتبر الأعداد الطبيعية: $a = 2n + 1$ ، $b = 4n + 3$ ، $c = 2n + 3$
 1) أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما و استنتج أن الأعداد a ، b ، c أولية فيما بينها.
 2) عين تبعا لقيم n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c
 عين قيمة n بحيث يكون: $\text{PGCD}(b, c) = 3$ و $\text{PPCM}(b, c) = 1305$
 3) اكتب b^2 في نظام أساسه a .

التمرين 97: دورة 1994. دقيقة

- 1/ أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 10
 ب- استنتج رقم أحاد العدد $(1994)^{1414}$

$u_n = 2^n$ المتتالية المعرفة بمجدها العام : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ /2
 أ. تحقق من أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية

نضع لكل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = (5 + 2^1) + (5 + 2^2) + \dots + (5 + 2^n)$
 ب- اوجد قيم n الطبيعية التي يكون من أجلها S_n قابلا القسمة على 10

التمرين 98: دورة 2004ع. طبيعية

- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 10 .
 استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $(7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3})$ يقبل القسمة على 10
- من أجل كل عدد طبيعي ، نضع : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$
 - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n [10]$.
 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي السمة الأقليدية للعدد S_n على 10 .

التمرين 99: دورة 1980ع. دقيقة

- 1- اوجد أعدادا طبيعية مربع كل منها يقسم العدد 1980
- 2- عين الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق : $m^2 - 5d^2 = 1980$
 حيث $d = \text{PGCD}(a, b)$ و $m = \text{PPCM}(a, b)$

التمرين 100: دورة 2007ع. طبيعية

- نعتبر المعادلة : $(E) : 4862x - 1430y = 2002 \dots$ حيث x و y عدنان صحيحان .
1. احسب القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 4862 ، 1430 ، 2002 .
 2. أ- بيّن أن (E) تقبل حلوها في \mathbb{Z}^2 .
 ب- حل المعادلة (E) .
 3. a و b عدنان طبيعيان حيث (a, b) حل للمعادلة (E) ، $d = \text{PGCD}(a, b)$.
 أ- عين القيم الممكنة لـ d .
 ب- عين الثنائيات (a, b) عندما $d = 7$

التمرين 101: دورة 2009ع. طبيعية

- 1 عدد طبيعي . عين باقي قسمة 4^{2n} على 5
- 2 ادرس بواقي قسمة 3^n على 5
- 3 ما هو باقي قسمة العدد 1429^{2009} على 5؟
- 4 ليكن العدد الطبيعي $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$
 - عين قيم n بحيث A_n يقبل القسمة على 5

الجزء الرابع: بكالوريات اجنبية

التمرين 102: toulouse 4 1970

باستعمال نظريات الموافقات عين مجموعة الاعداد الطبيعية n حيث: $n^3 - 3n^2 - 2 \equiv 0 [7]$

التمرين 103: toulouse 3 1970

- 1- احسب تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 5^n على 7 .
- 2- من أجل أي قيمة للعدد n يكون العدد: $5^{6n} + 5^n + 2$ قابلا للقسمة على 7؟

التمرين 104: toulouse 2 1970

اكتب تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 5 ثم استنتج باقي قسمة 2917^{541} على 5.

التمرين 105: toulouse 1 1970

- 1- اكتب الاعداد الأولية الأقل من 50.
- 2- هل العدد 1417 أولي؟
- 3- ماهي الأعداد الطبيعية a و b التي تحقق العلاقة: $a^2 = b^2 + 1517$ ؟

التمرين 106: Strasbourg 3

برهن باستعمال البرهان بالتراجع أو باستعمال الموافقات أن العدد $N = n(2n+1)(7n+1)$ يقبل القسمة على 6 مهما كان العدد الطبيعي n أكبر من أو يساوي 1.

التمرين 107: Strasbourg 2

- 1- كيف يمكن اختيار العدد n حتى يكون $2^n - 1$ يقبل القسمة على 9.
- 2- ما هو الشرط على العددين الطبيعيين x و y حتى يكون $2^x \times 11^y \equiv 1 [9]$ ؟

التمرين 108: Strasbourg 1

عين كل الثنائيات (a, b) حتى يكون:
$$\begin{cases} PGCD(a, b) = 5 \\ PPCM(a, b) = 8160 \end{cases}$$

التمرين 109: Rouen3 1970

- 1- ادرس باقي القسمة على 5 لقوى العدد 7: $7^1, 7^2, 7^3, \dots, 7^p$ حيث: $p \in \mathbb{N}^*$
- 2- ما هو باقي القسمة على 5 للعدد 7^{45}
- 3- بين أن: $16 \times 7^{2n} - 28 \times 3^{2n+3}$ يقبل القسمة على 5 مهما كان العدد الطبيعي n

التمرين 110: Rouen2 1970

- 1- ما هي مجموعة قواسم العدد 72؟
2- أ) ليكن p عدد طبيعي. اكتب العدد $p^2 - 6p - 63$ على شكل جداء عددين طبيعيين، أحدهما مربع تام والآخر غير مرتبط بالعدد p .
ب) استنتج كل الثنائيات (p, q) من \mathbb{N}^2 التي هي حل للمعادلة: $p^2 - 6p - 63 = q^2$

التمرين 111: Rouen1 1970

- من أجل كل عدد طبيعي n ، نعتبر u_n باقي قسمة 4^n على 7.
1- بين أنه يوجد عدد طبيعي a حيث: من أجل كل n ، $u_{n+a} = u_n$ و $u_{n+k} = u_n$ إذا كان $0 < k < a$
2- أجب عن نفس السؤال من أجل باقي قسمة 5^n على 7.
3- كيف يمكن اختيار n حتى يكون $5^n - 4^n$ قابلاً للقسمة على 7.

التمرين 112: Poitiers 2 1970

جد كل الاعداد الطبيعية المحصورة بين 100 و 200 والتي تقبل القسمة على 9 وتكتب في النظام ذي الأساس 6 من الشكل: $x3y$.

التمرين 113: Poitiers 1 1970

- نعتبر العدد $a = 2n(n^2 + 5)$ حيث n على الأقل يساوي 1.
1- بين أن a يقبل القسمة على 3 وعلى 4.
2- استنتج أنه يوجد عدد صحيح آخر k يقسم a من أجل كل $n \geq 1$ (أذكر المبرهنة المستعملة)

التمرين 114: Paris 1 1970

نعتبر الكسر $\frac{2n-3}{n+1}$ حيث n عدد صحيح يختلف عن -1.

- 1- من أجل أي قيمة لـ n يكون الكسر مكافئاً لعدد صحيح؟
2- من أجل أي قيمة لـ n يكون الكسر غير قابل للاختزال؟

التمرين 115: Orian 2 1970

عين العدد x الذي يكتب $abca$ في النظام ذي الأساس 11، ويكتب $bbac$ في النظام ذي الأساس 7

التمرين 116: Orian 1 1970

نعتبر الكسر $\frac{n^2+3}{n+2}$ حيث n عدد طبيعي.

- 1- عين قيمة n حتى يكون الكسر غير قابل للاختزال.
2- عين قيمة n حتى يكون الكسر مساوياً لعدد طبيعي.

التمرين 117: Nantes 1970

حل في \mathbb{Z} مجموعة الاعداد الصحيحة المعادلة: $x^2 - 3x + 4 \equiv 0 [7]$ حيث x مجهول.

التمرين 118: Nancy 1970

عين الثنائيات (x, y) من الاعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق الشروط الثلاثة التالية:

$$PGCD(x, y) = 5, PPCM(x, y) = 720, (2, 3) \text{ و يوجد عدد ناطق } r \text{ حيث: } r^2 = \frac{x}{y}$$

التمرين 119: Montpellier 1970

نعتبر العدد $N = n^3 - 3n + 5$ حيث n عدد طبيعي، باستعمال مبرهنات الموافقات عين ما يلي:

1- الشكل العام للعدد n حتى يكون لدينا: $N \equiv 0 [7]$

2- الشكل العام للعدد n حتى يكون لدينا: $N \equiv 1 [7]$

التمرين 120: Limoges 1970

برهن من أجل كل عدد طبيعي n أن العدد $N = n^2(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 60.

التمرين 121: Clermont-Ferrand

عين كل الثنائيات (a, b) من الاعداد الطبيعية حيث: $m + 11d = 203$

علما أن: $m = PPCM(a, b)$ و $d = PGCD(a, b)$

التمرين 122: Cambodge et Laos

عين كل الاعداد الطبيعية n حيث: أن العدد $2 \times 3^n + 3$ يقبل القسمة على 11.

التمرين 123: Bordeaux 2

برهن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 أن العدد $A = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ يقبل القسمة على 17
(يمكن استعمال البرهان بالتراجع أو استعمال الموافقات)

التمرين 124: Aix-en-Provence 2

برهن باستعمال الموافقات أنه إذا كانت الاعداد a, b, c ليست مضاعفة لـ 3 فإن $a^2 + b^2 + c^2$ مضاعفا لـ 3.

التمرين 125: Aix-en-Provence 1

الاعداد الموالية مكتوب في النظام ذي الأساس 10

1- نلاحظ أن: $999 = 27 \times 37$ ، بين من أجل كل عدد طبيعي n أن: $10^{3n} \equiv 1 [37]$

2- استنتج باقي القسمة على 37 للعدد: $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$.

التمرين 126 : Dijon

- 1- هل $2^{11} - 1$ عدد أولي.
- 2- p و q عددان طبيعيين غير معدومين، ما هو باقي قسمة $2^{pq} - 1$ على $2^p - 1$ ؟
- استنتج أن العدد $2^{pq} - 1$ يقبل القسمة على $2^p - 1$ وعلى $2^q - 1$.
- 3- بين أنه إذا كان العدد: $2^n - 1$ أوليا فإن n أولي.
- هل العكس صحيح؟

التمرين 127 : Rouen 1976

- k عدد صحيح، ونعتبر أن: $x = 2k - 1$ و $y = 9k + 4$
- 1- بين أن كل قاسم مشترك لـ x و y يقسم 17.
 - 2- استنتج حسب قيم k القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

التمرين 128 : Rennes 1976

- 1- حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $143x - 100y = 1$
- 2- عين مجموعة الاعداد الطبيعية p حيث: $10^{5p} + 10^{3p} - 2 \equiv 0 [143]$

التمرين 129 : Nancy 1976

- (u_n) المتتالية المعرفة بجدها الأول u_0 حيث: $u_0 \geq 4$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n - 3$
- 1- نضع $v_n = u_n - 3$ ، بين أن المتتالية (v_n) هندسية.
 - 2- استنتج عبارة v_n ثم عبارة u_n بدلالة u_0 و n .
 - 3- ماهي قيم u_0 ($u_0 \geq 4$) التي من أجلها يكون 3^{u_n} مكعب لعدد طبيعي؟
 - 4- نفرض أن: $u_0 = 4$ ، عين قيم n التي من أجلها يكون $3^{u_n} - 1$ مضاعفا للعدد 11.

التمرين 130 : Caen

- نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $324x - 245y = 7$ (1)
- 1- بين أنه من أجل كل الحلول (x, y) لدينا: x مضاعف للعدد 7.
 - 2- عين حلا خاصا (x_0, y_0) للمعادلة ثم استنتج كل الحلول.
 - 3- ليكن $d = \text{PGCD}(x, y)$ حيث (x, y) حل للمعادلة (1)، ماهي القيم الممكنة لـ d ؟
- استنتج حلول المعادلة (1) التي من أجلها يكون x و y أوليان في ما بينهما.

التمرين 131 : Antilles-Guyane 1976

- 1- ادرس تبعا لقيم n بواقي القسمة على 7 لاعداد: 4^n ، 5^n و 6^n

- 2- عين قيم n التي من أجلها يكون: $4^n + 5^n + 6^n$ يقبل القسمة على 7.
 - حدد القيم المحصورة بين 105 و 125.

التمرين 132: Aix-marseille

- 1- ادرس تبعا لقيم n بواقي قسمة 4^n على 7.
 2- ادرس تبعا لقيم n بواقي قسمة $A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n$ على 7. (لاحظ أن: $851 \equiv 4[7]$)
 3- نعتبر العدد B الذي يكتب $\overline{2103211}^{(4)}$
 - عين في النظام ذي الأساس 10 باقي قسمة B على 4.

التمرين 133: Lyon 2

- 1- x عدد صحيح، عين حسب قيم x بواقي قسمة x^3 على 9.
 2- استنتج من أجل كل عدد صحيح x أن:
 $x \equiv 0[3] \Rightarrow x^3 \equiv 0[9]$
 $x \equiv 1[3] \Rightarrow x^3 \equiv 1[9]$
 $x \equiv 2[3] \Rightarrow x^3 \equiv 8[9]$
 3- نعتبر ثلاث اعداد صحيحة x, y و z حيث: $x^3 + y^3 + z^3$ يقبل القسمة على 9.
 - بين أن أحد الاعداد x, y و z يقبل القسمة على 3.

التمرين 134: Lyon 1

حل في $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ PGCD(x, y) = 8 \end{cases}$$

التمرين 135: Caen 1977

- 1- عين مجموعة القواسم الطبيعية لـ 210
 2- إذا كان x, y عددان طبيعيين غير معدومين و $d = PGCD(x, y)$ و $m = PPCM(x, y)$
 - عين مجموعة الثنائيات (x, y) حيث:

$$\begin{cases} m = 210d \\ y - x = d \end{cases}$$

التمرين 136: Aix-en-Provence 2

- 1- بين من أجل كل الاعداد الصحيحة a, b و q أن: $PGCD(a, b) = PGCD(b, a - bq)$
 2- بين من أجل كل عدد صحيح n أن: $PGCD(5n^3 - n, n + 2) = PGCD(n + 2, 38)$
 3- عين مجموعة الاعداد الصحيحة n حيث: $n + 2$ يقسم $5n^3 - n$
 4- ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(5n^3 - n, n + 2)$ ؟
 - عين مجموعة الاعداد الصحيحة n حيث: $PGCD(5n^3 - n, n + 2) = 19$

التمرين 137: Strasbourg 1978

n عدد طبيعي

- 1- بين أن: $n^2 + 5n + 4$ و $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $n + 1$
- 2- عين مجموعة قيم n التي من أجلها $3n^2 + 15n + 19$ يقبل القسمة على $n + 1$
- 3- استنتج أن: $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على $n^2 + 3n + 2$

التمرين 138: Reims 1978

نعتبر ثلاث أعداد a, b و c مكتوبة في النظام ذي الأساس n حيث:

$$c = 13054, \quad b = 114, \quad a = 111$$

- 1- علما أن $c = ab$ عين n ، ثم كتابة كل من الأعداد a, b و c في النظام ذي الأساس 10
- 2- تحقق باستعمال خوارزمية اقليدس أن a, b أوليان في ما بينهما، ثم استنتج حلول المعادلة: $ax + by = 1$ في \mathbb{Z}^2 .

التمرين 139: Nice 1978

- 1- جد كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حتى يكون لدينا:

$$\begin{cases} PGCD(a, b) = 42 \\ PPCM(a, b) = 1680 \end{cases}$$
- 2- عين مجموعة الأعداد الصحيحة x حيث: $8x \equiv 7[5]$
- 3- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $336x + 210y = 294$ (السؤال الثاني يعطي حدا خاصا للمعادلة المبسطة)

التمرين 140: Nantes 1978

- 1- بين أنه إذا كان عدداً أوليان فيما بينهما فإن مجموعها وجدأهما أوليان في ما بينهما.
- 2- استنتج مجموعة الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث:

$$\begin{cases} a + b = 96 \\ PPCM(a, b) = 180 \end{cases}$$

التمرين 141: Montpellier 1978

- a, b, c و d أربعة أعداد طبيعية غير معدومة تشكل هذا الترتيب متتالية هندسية أساسها أولي مع a
- عين هذه الأعداد علماً أنها تحقق العلاقة: $10a^2 = d - b$

التمرين 142: Centres etrangers 1

- بين أنه إذا كان عدداً a, b أوليان فيما بينهما فإن العددين $a^2 + b^2$ و ab أوليان في ما بينهما أيضاً
- 1- عين مجموعة الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 325 \\ PPCM(a, b) = 30 \end{cases}$$
- (الأعداد مكتوبة في النظام ذي الأساس 10)

التمرين 143: Besancon 1978

a, b عددان أوليان حيث $a > b$

1- عين كل الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حيث: $x^2 - y^2 = a^2 b^2$

2- تطبيق: عين كل الثنائيات (x, y) في الحالتين التاليتين: $(a, b) = (7, 2)$ و $(a, b) = (11, 5)$.

التمرين 144: Inde 1979

b عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 3. وفي كل ما يأتي الاعداد مكتوبة في النظام ذي الأساس b .

1- بين أن: $\overline{132}$ يقبل القسمة على $b+1$ و $b+2$

2- من أجل أي قيمة للعدد b يكون $\overline{132}$ قابلا للقسمة على 6؟

3- بين أن: $A = \overline{1320}$ يقبل القسمة على 6.

التمرين 145: Bordeaux 1979

ليكن n عدد صحيح، ونعتبر العددين $A = 3n + 4$ و $B = 9n - 5$

1- عين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

2- عين قيم n حتى يكون القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B يساوي 17 والمضاعف

المسترك الأصغر لهما يساوي 884.

التمرين 146: Poitiers 1980

a, b عددان أوليان فيما بينهما

1- بين أن: $a+b$ و ab أوليان فيما بينهما، ثم استنتج أن العددين $a+b$ و $a^2 - ab + b^2$ إما

أوليان في ما بينهما أو يقبلان القسمة على 3

2- برهن المساواة التالية: $PGCD(a+b, a^2 - ab + b^2) = PGCD(a+b, 3)$

التمرين 147: Orleans-Tours 1980

نعتبر المعادلة: $4x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ (1)

1- بين بدراسة الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 3$ أن المعادلة (1) تقبل

حلا وحيدا حقيقيا ينتمي إلى المجال

2- بين أن المعادلة (1) إذا قبلت حلا ناطقا: $\frac{p}{q}$ حيث p و q أوليان فيما بينهما

فإن p يقسم 3 و q يقسم 4.

- ماهي الاعداد الناطقة التي تحقق هذا الشرط

3- عين الحل $\frac{p}{q}$ للمعادلة (1) بعد تحليل $f(x)$ إلى جداء عوامل أحدها $(qx - p)$

عين الحلول الأخرى للمعادلة والتي تنتمي إلى مجموعة الاعداد المركبة.

التمرين 148: Nancy-Mitz 1980

- 1- بين أنه إذا كان m عددا طبيعيا حيث: $0 < m < 7$ فإن: $77 - 11m$ لا يقبل القسمة على 7. استنتج أن 77 لا يمكن أن يكتب من الشكل $11m + 7n$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
- 2- x عدد صحيح، بين أنه يوجد عدد m ($0 < m < 7$) حيث: $x - 11m$ يقبل القسمة على 7. استنتج انه إذا كان $x > 77$ فإن x يمكن أن يكتب من الشكل $11m + 7n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$
- 3- لدينا نوعين من القريصات نسند إليهما على التوالي القيمتين 7 و 11
- بين أن 59 هي أكبر قيمة والتي لا يمكن أن تتحقق من خلال عدد معين من القريصات
- بين أن القيم التي يمكن أن نتحصل عليها من عدد معين من القريصات تكتب $11m + 7n$

التمرين 149: Japan 1980

- 1- نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $18a + 23b = 2001$ (E)
أ) بين من أجل كل ثنائية (a, b) حل للمعادلة (E) أن: a مضاعف لـ 23 و b مضاعف لـ 3.
ب) عين حلا خاصا للمعادلة (E). ثم حل المعادلة (E).
- 2- عين الثنائيات (p, q) من الاعداد الصحيحة حيث: $18d + 23m = 2001$ حيث:
 $d = PGCD(p, q)$ و $m = PPCM(p, q)$

التمرين 150: Rennes 1980

- 1- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $23x - 17y = 6$
- 2- استنتج مما سبق الاعداد الطبيعية A الأقل من 1000 حيث: باقي قسمة A على 23 هو 2 وباقي قسمة A على 17 هو 8.

التمرين 151: Paris 1981

عين الاعداد الطبيعية التي تكتب \overline{abca} في النظام ذي الأساس 10 والتي تقبل القسمة على 7، وباقي قسمتها على 99 هو 1.

التمرين 152: Nantes 1981

- ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، ونعتبر العددين: $a = 11n + 3$ و $b = 13n - 1$
- 1- بين أن كل قواسم a و b هي قواسم لـ 50.
- 2- حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة: $50x - 11y = 3$ ، ثم استنتج قيم n حيث: $PGCD(a, b) = 50$
- 3- ما هي قيم n التي من أجلها يكون: $PGCD(a, b) = 25$

التمرين 153: Montpellier 1981

ليكن n عدد طبيعي

- 1- عين تبعا لقيم n بواقي قسمة 5^n على 13.
- 2- استنتج أن: $5 - 1981^{1981}$ يقبل القسمة على 13
- 3- بين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ غير معدوم أن العدد: $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13

التمرين 154: Lyon 2 1981

ليكن n عدد طبيعي،

- 1- بين أن: $PGCD(n-1, n+3) = PGCD(n+3, 4)$.
- ما هي القيم التي يمكن أن يأخذها $PGCD(n-1, n+3)$
- 2- عين مجموعة قيم n التي من أجلها يكون: $n-1$ يقسم $n+3$.
- 3- بين من أجل كل قيمة لـ n أن: $n-1$ و $n^2 + 2n - 2$ أوليان فيما بينهما.
- 4- عين مجموعة قيم n حيث: $(n-1)(2n+1)$ يقسم $(n+3)(n^2 + 2n - 2)$.

التمرين 155: Lyon 1 1981

- 1- عين في \mathbb{N} مجموعة قواسم 30.
- 2- جد كل الثنائيات (x, y) من \mathbb{N}^{*2} حيث: القاسم المشترك الأكبر d والمضاعف المشترك الأصغر m يحققان: والتي تحقق العلاقة التالية: $3m - 2d = 30$

التمرين 156: Lille 2 1981

- 1- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة: $x - 9y = 13$
- 2- عين كل العناصر (a, b) من \mathbb{N}^2 والتي تحقق العلاقة التالية:
 $PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13$

التمرين 157: Lille 1 1981

- 1- حلل العدد 319 إلى جداء عوامل أولية
- 2- بين أنه إذا كان x و y أوليين في ما بينهما فإن: $3x + 5y$ و $x + 2y$ أوليان في ما بينهما
- 3- حل في \mathbb{N}^* الجملة:
$$\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$$
 حيث: $m = PPCM(a, b)$

التمرين 158: Clermont-Ferrand 1981

- 1- عين كل الثنائيات (a, b) من \mathbb{N}^2 حيث القاسم المشترك الأكبر d والمضاعف المشترك الأصغر m يحققان العلاقة: $8m = 105d + 30$

التمرين 159: Besancon 1981

لتكن الثنائية (a, b) من الاعداد الطبيعية غير المعدومة، نعتبر m والمضاعف المشترك الأصغر و d القاسم المشترك الأكبر

$$\begin{cases} b - a = d \\ b^2 - a^2 = m - d^2 \end{cases} \quad \text{اكتب الثنائية } (a, b) \text{ بدلالة } d \text{ حيث:}$$

التمرين 160: Antilles-Guyane 1981

ليكن n عدد صحيح، ونعتبر العددين الصحيحين a و b المعرفين بـ :

$$a = n^2 - 2n + 5 \quad \text{و} \quad b = n + 1$$

1- بين أن: $PGCD(a, b) = PGCD(a, 6)$ ، ومن أجل أي قيمة لـ n يكون: $PGCD(a, b) = 3$

2- عين قيمة n حتى يكون: $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا.

التمرين 161: Reims 1982

1- عين المجموعة U ، مجموعة الاعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون: $n + 1$ يقسم $2n - 1$.

2- بين من أجل كل قيمة لـ n أن: $n + 2$ و $n^2 + 3n - 1$ أوليان فيما بينهما.

3- عين المجموعة V ، مجموعة الاعداد الصحيحة n ($n \neq -2$) حيث:

$$\frac{(2n^2 - 1)(2n^2 + 3n - 1)}{(n^2 - 2)(n + 2)} \text{ يكون عددا صحيحا.}$$

التمرين 162: Poitiers 1982

في هذا التمرين a, b, p, q اعداد صحيحة.

1- عين المجموعة U ، مجموعة الاعداد الصحيحة n التي من أجلها يكون: $n + 1$ يقسم $2n - 1$.

2- بين من أجل كل قيمة لـ n أن: $n + 2$ و $n^2 + 3n - 1$ أوليان فيما بينهما.

التمرين 163: Poitiers 1982

في هذا التمرين a, b, p, q اعداد صحيحة.

1- أ) نفرض أن: $a = 9p + 4q$ و $b = 2p + q$ ، بين أن: $PGCD(a, b) = PGCD(p, q)$

ب) بين أن العددين $9p + 4q$ و $2p + 1$ أوليان فيما بينهما، ماهو المضاعف المشترك الأصغر لهما.

2- عين بدلالة p القاسم المشترك الأكبر للعددين $9p + 4$ و $2p - 1$

التمرين 164: Poitiers 1982

1- a, b عددان طبيعيان، القاسم المشترك الأكبر لمجموعها وجدائهما هو مربع لعدد أولي p

أ) بين أن: p^2 يقسم a^2 (يمكن ملاحظة أن: $a^2 = a(a + b) - ab$)

- استنتج أن p يقسم a ثم بين أن: p يقسم b .

- (ب) برهن أن القاسم المشترك الأكبر لـ a و b هو p أو p^2 .
- 2- في هذا السؤال نريد تعيين العددين a, b حيث: $PGCD(a+b, ab) = 49$ و $PPCM(a, b) = 231$
- أ) ليكن a, b عدداً طبيعيين، بين أن: $PGCD(a, b) = 7$.
- (ب) ما هي حلول المسألة المعطاة؟

التمرين 165: Polynesie 1999

- 1- برهن من أجل كل عدد طبيعي n أن 2^{3n-1} مضاعف لـ 7
- استنتج أن: $2^{3n+1} - 2$ مضاعف لـ 7، وأن: $2^{3n+2} - 4$ مضاعف لـ 7
- 2- عين تبعا لقيم n باقي قسمة 2^n على 7.
- 3- p عدد طبيعي، ونعتبر العدد: $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$
- أ) إذا كان $p = 3n$ ما هو باقي قسمة A_p على 7؟
- (ب) بين أنه إذا كان $p = 3n + 1$ فإن A_p يقبل القسمة على 7.
- (ج) ادرس الحالة: $p = 3n + 2$
- 4- نعتبر العددين a و b المكتوبان في النظام الثنائي (النظام ذي الأساس 2) كما يلي:
- $$b = \overline{1000100010000} \quad , \quad a = \overline{1001001000}$$
- تحقق أن العددين a و b من الشكل A_p ، هل يقبلان القسمة على 7؟

التمرين 166: Liban 1999

- ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $a = 4n + 3$ و $b = 5n + 2$ و $d = PGCD(a, b)$
- 1- أعط قيمة d في الحالات التالية: $n = 1$ ، $n = 11$ ، $n = 15$.
- 2- احسب $5a - 4b$ ، ثم استنتج القيم الممكنة لـ d .
- 3- أ) عين العددين الطبيعيين n و k حيث: $4n + 3 = 7k$
- (ب) عين العددين الطبيعيين n و k حيث: $5n + 2 = 7k$
- 4- ليكن r باقي قسمة n على 7
- استنتج من الأسئلة السابقة قيمة r التي من أجلها d تساوي 7.
- من أجل أي قيمة لـ r يكون $d = 1$.

التمرين 167: Liban 1999

- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نعتبر الاعداد:
- $$c_n = 2 \times 10^n + 1 \quad \text{و} \quad b_n = 2 \times 10^n - 1 \quad , \quad a_n = 4 \times 10^n - 1$$
- 1- أ) احسب a_n, b_n, c_n من أجل: $n = 1$ ، $n = 2$ ، $n = 3$.
- (ب) كم يوجد من رقم في الكتابة العشرية للعددين a_n و c_n ؟ ثم بين أنهما يقبلان القسمة على 3
- مجلة الرائد في الرياضيات:- الحساب -2020- 2021 38 الأساتذة: بالعبيدي م العربي+بوغزالة احمد+باي زاوي

- (ج) بين باستعمال قائمة الاعداد الأولية الأقل من 100 أن b_3 أولي.
- (د) بين من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أن: $b_n \cdot c_n = a_{2n}$ ، ثم استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6 .
- (هـ) بين أن: $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 2)$ ، ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.
- 2- نعتبر المعادلة (1): $b_3x + c_3y = 1$ ، حيث x و y مجهولين صحيحين.
- أ) برر أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا.
- ب) استعمل خوارزمية اقليدس على العددين b_3 و c_3 لتعيين حل خاص للمعادلة (1).
- ج) حل المعادلة (1).

التمرين 168: دورة 2003 أسيا

1. أ) n عدد طبيعي، انشر العبارة $(n+3)(3n^2 - 9n + 16)$ ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3 - 11n + 48$ قابلا للقسمة على $n+3$.
- ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم.
2. بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c تكون المساواة التالية صحيحة: $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$
3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2، تكون المساواة التالية صحيحة: $PGCD(3n^3 - 11n; n+3) = PGCD(48; n+3)$
4. أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48

ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ عددا طبيعيا

ب) أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ، $g[f(a)] = a$ ، ما القول عن $g[f(a)] = a$ ؟

التمرين 169: دورة 2001 علوم Antilles Guyane

1. a و b عدداً طبيعيين غير معدومين بحيث: $PGCD(a+b; ab) = p$ حيث p عدد أولي
- أ) برهن أن p يقسم a^2 (يمكنك ملاحظة: $a^2 = a(a+b) - ab$)
- ب) استنتج أن p يقسم a ، و استنتج أن p يقسم b
- ج) برهن أن: $PGCD(a; b) = p$
2. a و b عدداً طبيعيين غير معدومين بحيث $a \leq b$

أ) حل الجملة التالية: $\begin{cases} PGCD(a; b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$ ب) استنتج حلول الجملة: $\begin{cases} PGCD(a+b; ab) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$

التمرين 170: دورة 2005 لبنان

1. نعتبر المعادلة (E) : $109x - 226y = 1$ حيث x و y عدنان صحيحان .
 (أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226. ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟
 (ب) برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(141 + 226k; 68 + 109k)$ ، حيث k عدد صحيح .
 (ج) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر من أو يساوي 226؛ ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e يحقق $109d = 1 + 226e$ (يطلب تعيين قيمتي d و e).
 2. برهن أن 227 عدد أولي .
 3. نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a \leq 226$. نعتبر الدالتين f و g للمجموعة A في نفسها
 f ترفق بكل عدد a ، باقي قسمة a^{109} على 227 ؛ g ترفق بكل عدد a ، باقي قسمة a^{141} على 227 .
 (أ) تحقق من أن $g[f(0)] = 0$.
 (ب) برهن أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ، $a^{226} \equiv 1 [227]$. (ج) استنتج من 1 .
 (ب) أنه من أجل كل $a \in A - \{0\}$ ، $g[f(a)] = a$ ، ما القول عن $g[f(a)] = a$ ؟

التمرين 171: دورة 2008 رياضيات-تونس

- 1) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) : $3x - 8y = 5$ برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(8k - 1; 3k - 1)$ ، حيث k عدد صحيح .
 2-أ) x, n و y ثلاثة أعداد صحيحة بحيث : $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ برهن أن الثنائية (x, y) حل للمعادلة (E)
 ب) نعتبر الجملة (S) : $\begin{cases} n \equiv 2 [3] \\ n \equiv 7 [8] \end{cases}$ حيث n عدد صحيح
 برهن أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان $n \equiv 23 [24]$
 3-أ) k عدد طبيعي . برهن أن باقي قسمة 2^{2k} على العدد 3 هو باقي قسمة 7^{2k} على العدد 8
 ب) تحقق أن 1991 حل للجملة (S) وبيّن أن العدد الطبيعي $1991^{2008} - 1$ يقبل القسمة على 24.

التمرين 172: دورة 2008 علوم-تونس

- 1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث $11x - 5y = 2$.
 أ- تأكد أن الثنائية $(2; 4)$ حلا للمعادلة (E) .
 ب- أثبت أن الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان : $11(x - 2) = 5(y - 4)$.
 ج- استنتج حلول المعادلة (E) .

- (2) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . نضع : $a = 5n + 2$ و $b = 7n + 5$.
 أ- احسب $5b - 7a$ ثم استنتج أن $\text{PGCD}(a; b) = 1$ أو $\text{PGCD}(a; b) = 11$.
 ب- عيّن ، باستعمال السؤال (1) ، الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $\text{PGCD}(a; b) = 11$.

التمرين 173: دورة 2011 علوم-المغرب

- ليكن العدد الصحيح الطبيعي $N = \underbrace{111\dots11}_{2010 \text{ مرة الرقم } 1}$ الممثل في نظام التعداد العشري .
 1- بيّن أن العدد N يقبل القسمة على 11
 2- أ) تحقق أن العدد 2011 أولي وأن : $10^{2010} - 1 = 9N$
 ب) بيّن أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$.
 ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N
 3- بيّن أن العدد N يقبل القسمة على 22121 .

التمرين 174: دورة 2008 علوم-كالدونيا الجديدة

- نرمز بـ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta$ إلى أرقام النظام ذي الأساس 12.
 1. أ- N_1 عدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$
 عيّن كتابة N_1 في النظام العشري
 ب- N_2 عدد مكتوب في النظام العشري كما يلي : $N_2 = 1131$
 اكتب العدد N_2 في النظام ذي الأساس 12
 2. في كل مايلي عدد طبيعي N يكتب بشكل عام كما يلي : $N = \overline{a_n \dots a_1 a_0}^{12}$
 3. أ- برهن أن : $N \equiv a_0 [3]$ استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد طبيعي مكتوب في النظام 12
 ب- انطلاقاً من الكتابة في النظام ذي الأساس 12 ، حدد إذا كان N_2 يقبل القسمة على 12
 ثم تحقق من صحة ذلك بكتابه في النظام العشري .
 4. أ- برهن أن : $N \equiv a_n + \dots + a_1 + a_0 [11]$ ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد طبيعي مكتوب في النظام 12.
 ب- انطلاقاً من الكتابة في النظام ذي الأساس 12 ، حدد إذا كان N_1 يقبل القسمة على 11
 ثم تحقق من صحة ذلك بكتابه في النظام العشري .
 4. عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 12 كما يلي : $\overline{x 4 y}^{12}$.
 عين الأعداد الطبيعية x و y حتى يكون العدد N يقبل القسمة على 33
 أ) حل الجملة التالية : $\begin{cases} \text{PGCD}(a; b) = 5 \\ \text{PPCM}(a; b) = 170 \end{cases}$:
 ب) استنتج حلول الجملة : $\begin{cases} \text{PGCD}(a + b; ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a; b) = 170 \end{cases}$

التمرين 175: دورة 2011 علوم Antilles Guyane

I - نعتبر المعادلة (E) : $11x - 7y = 5$ حيث x و y عددان صحيحان .
 أ) تحقق بواسطة نص مبرهنة أنه توجد ، على الأقل ، ثنائية $(u; v)$ بحيث : $11u - 7v = 5$
 - أوجد ثنائية $(u; v)$. (ب) استنتج حلول المعادلة (E) . (ج) استنتج حلول المعادلة (E) .
 د) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) . نعتبر المستقيم (D) المعروف بالمعادلة الديكارتية : $11x - 7y - 5 = 0$. نسمي \mathcal{E} مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي بحيث :
 $0 \leq x \leq 50$ و $0 \leq y \leq 50$.

عَيِّن عدد النقط من المستقيم (D) و التي تنتمي للمجموعة \mathcal{E} والتي إحداثياتها أعداد صحيحة
 II- : نعتبر المعادلة (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$ حيث x و y عددان صحيحان .
 أ) برهن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (F) فإن : $x^2 \equiv 2y^2 [5]$
 ب) لتكن x و y أعداد صحيحة . أنقل ثم أكمل الجدولين التاليين :

| | | | | | | |
|---------------|---|---|---|---|---|-----|
| $y \equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
| $2y^2 \equiv$ | | | | | | [5] |

| | | | | | | |
|--------------|---|---|---|---|---|-----|
| $x \equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | [5] |
| $x^2 \equiv$ | | | | | | [5] |

- ما هي القيم الممكنة لباقي القسمة الإقليدية للعدد x^2 و للعدد $2y^2$ على العدد 5 ؟
 ج) استنتج أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (F) فإن x و y من مضاعفات 5.
 III- بيِّن أنه إذا كان العددين x و y من مضاعفات 5 فإن الثنائية $(x; y)$ ليست حل للمعادلة (F)
 ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة (F)

التمرين 176: دورة 2011 علوم Polynésie

نذكر بالنتيجة المسماة بـ « المبرهنة الصغيرة لـ فيرما Fermat » . « إذا كان p عددا أوليا و a عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $(a^{p-1} - 1)$ »
 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = 10u_n + 21$
 1- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3
 2- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n = 10^{n+1} - 7$
 ب) استنتج من أجل كل عدد طبيعي n ، كتابة العدد u_n في النظام العشري .
 3- برهن أن u_2 عدد أولي .
 نقترح فيما يلي دراسة قابلية القسمة للحدود u_n على بعض الأعداد الأولية
 4- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على كل من الأعداد 2 ، 3 و 5
 5- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n \equiv 4 - (-1)^n [11]$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على 11.
6- أ) برهن ان : $10^{16} \equiv 1[17]$
برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي k ، u_{16k+8} يقبل القسمة على 17 .

انتهى بحمد الله وتوفيقه

تمنيائنا لكم بالتوفيق النام في بكالوريا 2021

مع تحيات الأستاذين :

بالعبيدي محمد العربي

باي زواوي

ترقبوا الحلول في قناة : باي زواوي

BEY MATHS





مجلة الرائد في الرياضيات



حلول تمارين الحساب في البكالوريا بين يديك

الشعب: تقني رياضي+رياضيات

$$\alpha^p \equiv \beta^p [n]$$

BAC2021

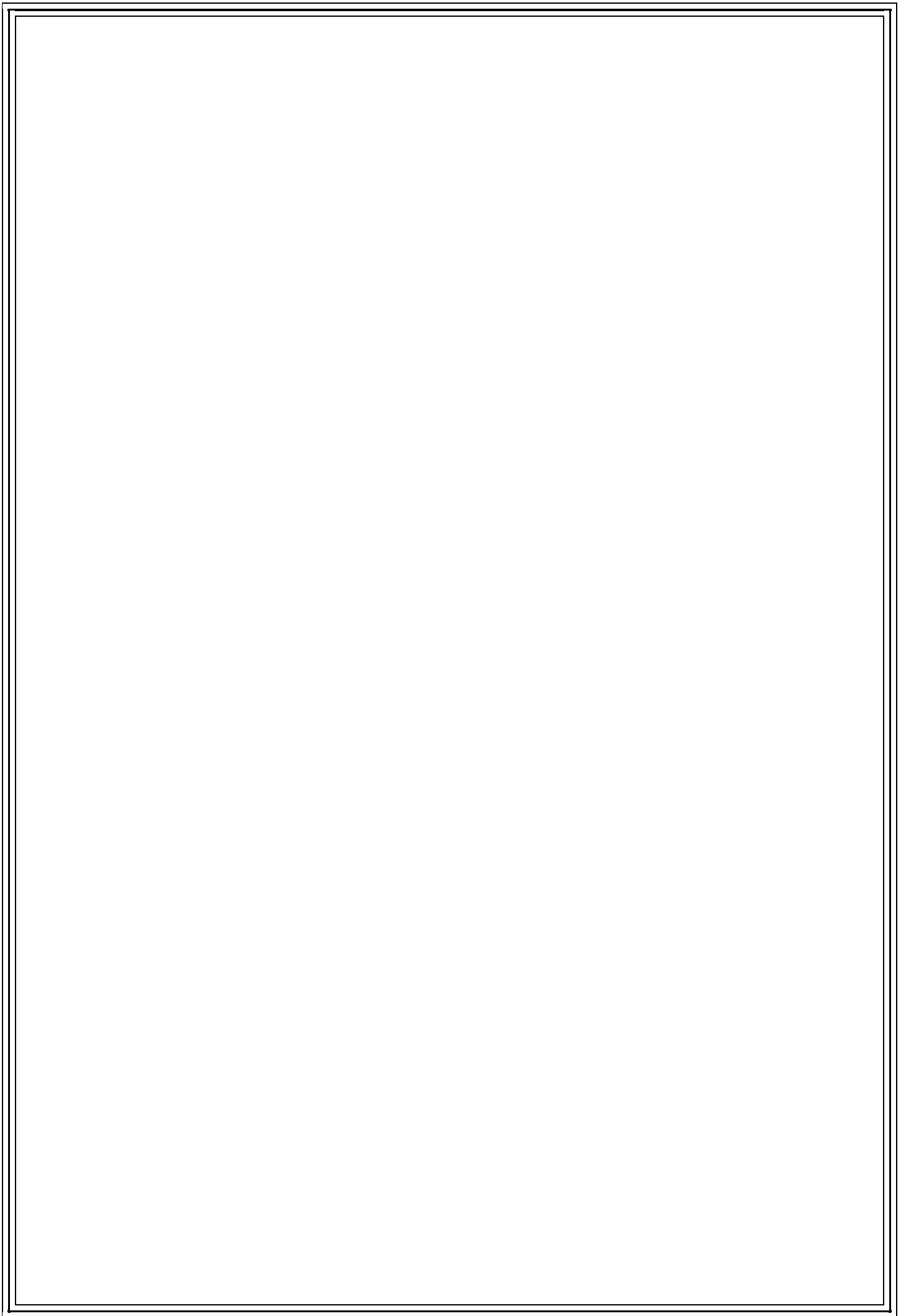
إعداد الأساتذة:

بالعبيدي م العربي

بوغزالة احمد

باي زواوي





مجلة الرائد في الرياضيات

الحلول

الجزء الثاني

تقني رياضي

الجزء الثالث

رياضيات

BAC2021

الجزء الثاني: تمارين البكالوريا النظام الجديد

شعبة تقني رياضي

التمرين 48: 2020 م 1

1) إيجاد $\text{PGCD}(693; 216)$ واستنتاج أن المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتان.

$$693 = 216 \cdot 3 + 45 \quad \text{و} \quad 216 = 45 \cdot 4 + 36 \quad \text{و} \quad 45 = 36 \cdot 1 + 9 \quad \text{و} \quad 36 = 9 \cdot 4 + 0$$

ومنه: $\text{PGCD}(693; 216) = 9$ آخر باقي غير معدوم

لدينا: $693x - 216y = 738 \dots (E_1)$ بقسمة الطرفين على 9 نجد: $77x - 24y = 82 \dots (E_2)$

وعليه المعادلتين (E_1) و (E_2) متكافئتان ومعناه لهما نفس مجموعة الحلول

2) التحقق أن الثانية (2;3) حل للمعادلة (E_2) ثم إيجاد حلولها في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

الثانية (2;3) حل للمعادلة (E_2) لأن $77(2) - 24(3) = 82$

لدينا: $\begin{cases} 77x - 24y = 82 \\ 77(2) - 24(3) = 82 \end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد: $77(x - 2) - 24(y - 3) = 0$

ولدينا: $77(x - 2) - 24(y - 3) = 0$ تكافئ (*) $77(x - 2) = 24(y - 3) \dots\dots$

المعادلة (*) تعني أن $24 \mid 77(x - 2)$ ومنه $24 \mid (x - 2)$ لأن 77 أولي مع 24 حسب مبرهنة غوص.

أي: $x - 2 = 24k$ إذن $x = 24k + 2$ حيث k عدد صحيح.

بتعويض قيمة x في المعادلة (*) نجد: $77(24k) = 24(y - 3)$ أي $y = 77k + 3$

ومنه حلول المعادلة (E_2) هي: $(x; y) = (24k + 2; 77k + 3)$ حيث k عدد صحيح

3) إيجاد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق $|y - x| \leq 54$

لدينا: $(x; y) = (24k + 2; 77k + 3)$ ومنه $|y - x| \leq 54$ تكافئ $|77k + 3 - 24k - 2| \leq 54$

وعليه $|53k + 1| \leq 54$ وتكافئ $-54 \leq 53k + 1 \leq 54$ وتكافئ $-\frac{55}{53} \leq k \leq 1$

ومنه قيم k هي $k \in \{-1; 0; 1\}$ وعليه الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E_2) التي تحقق

$|y - x| \leq 54$ هي: $(x; y) = (-22; -74)$ و $(x; y) = (3; 2)$ أو $(x; y) = (26; 80)$

4) إيجاد العددين α و β ، ثم كتابة العدد N في النظام العشري.

لدينا: $N = \alpha + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 9^2 + \beta \cdot 9^3 = 729\beta + \alpha + 558$ الانتقال من النظام 9 إلى النظام العشري

ولدينا: $N = \alpha + \beta \cdot 6^2 + \alpha \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^4 = 36\beta + 217\alpha + 1296$ الانتقال من النظام 6 إلى النظام العشري

وعليه $729\beta + \alpha + 558 = 36\beta + 217\alpha + 1296$ وتكافئ (*) $693\beta - 216\alpha = 738$

بالمطابقة بين المعادلتين (*) و (E_1) نجد: $\beta = x = 24k + 2$ حيث $0 \leq \beta < 9$ وعليه $\beta = 2$

$\alpha = y = 77k + 3$ حيث $0 \leq \alpha < 6$ وعليه $\alpha = 3$

بعد تعويض قيمة كلا من $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ في المعادلة $N = 729\beta + \alpha + 558 = 2019$

التمرين 49: 2020 م

1-أ) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

لدينا: $3^0 \equiv 1[5]$ ، $3^1 \equiv 3[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3^3 \equiv 2[5]$ ، $3^4 \equiv 1[5]$.

بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

| $n =$ | $4k$ | $4k + 1$ | $4k + 2$ | $4k + 3$ |
|--------------|------|----------|----------|----------|
| $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 4 | 2 |

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد: $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1$ على 5

لدينا: $8 \equiv 3[5]$ ومنه $8^{2000} \equiv 3^{2000}[5]$ ومنه $8^{2000} \equiv 1[5]$ لأن $8^{2000} = 4.(500)$

ولدينا: $3^{1441} \equiv 3[5]$ لأن $1441 = 4.(360) + 1$

وعليه $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1 \equiv 1 - 2 \times 3 - 1[5]$ ومنه $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1 \equiv 4[5]$

ومنه باقي قسمة العدد $8^{2020} - 2 \times 3^{1441} - 1$ على 5 هو 4

2- تعيين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[5]$

$a_n \equiv 0[5]$ تكافئ $3^{n+1} \equiv 1[5]$ وعليه $n+1 = 4k$ من الجدول أي $n = 4k+3$ حيث $k \in \mathbb{N}$

3-أ) تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و b_n

لدينا: $b_n = 7a_n + 5$ تكافئ لدينا: $b_n - 7a_n = 5$

نضع: $\text{PGCD}(b_n; a_n) = d$ ومنه d يقسم كلا من a_n و b_n

ومنه d يقسم $b_n - 7a_n$ إذن d يقسم 5 أي $d = 1$ أو $d = 5$

ب) تبين أن $a_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا $b_n \equiv 0[5]$

$a_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا $7a_n \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا $7a_n + 5 \equiv 0[5]$ إذا وفقط إذا $b_n \equiv 0[5]$

ج) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العددين a_n و b_n أوليين فيما بينهما.

العددين a_n و b_n أوليين فيما بينهما معناه $\text{PGCD}(b_n; a_n) = 1$

من الجواب 2 لدينا: $\text{PGCD}(b_n; a_n) = 5$ معناه $n = 4k+3$

وعليه $\text{PGCD}(b_n; a_n) = 1$ معناه $n = 4k$ أو $n = 4k+1$ أو $n = 4k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}$

التمرين 50: دورة 2019

1-أ) التحقق أن الثنائية $(6n+2; 10n+3)$ حاد للمعادلة (E)

الثنائية $(6n+2; 10n+3)$ حاد للمعادلة (E) لأن $5(6n+2) - 3(10n+3) = 1$.

ب) استنتاج أن العددين $6n+2$ و $10n+3$ أوليان فيما بينهما.

العلاقة $5(6n+2) - 3(10n+3) = 1$ تعني أن $6n+2$ و $10n+3$ أوليان فيما بينهما (مبرهنة بيزو)

2-أ) تبين أن: $d = 1$ أو $d = 41$.

لدينا $\text{PGCD}(a; b) = d$ حيث: $a = 10n+3$ و $b = 3n+5$

يجب إيجاد علاقة بين a و b مستقلة عن n

لدينا: $3a - 10b = 41$ أي $3a - 10b = 10(3n + 5) - 3(10n + 3) = 41$

ولدينا: d يقسم a ومنه d يقسم $3a$ (1)

d يقسم b ومنه d يقسم $10b$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن d يقسم $3a - 10b$ وعليه d يقسم 41

لكن 41 عدد أولي أي يقبل قاسمان هما 1 و 41

(ب) تبين أنه إذا كان $d = 41$ فإن $n \equiv 12[41]$.

لدينا: $d = 41$ معناه $\begin{cases} a \equiv 0[41] \\ b \equiv 0[41] \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} 10n + 3 \equiv 0[41] \\ 3n + 5 \equiv 0[41] \end{cases}$ بالجمع طرف لطرف نجد:

$7n - 2 \equiv 0[41]$ وعليه $7n \equiv 2[41]$ ومنه $42n \equiv 12[41]$ (بضرب الطرفين في 6)
ومنه $n \equiv 12[41]$ لأن $42 \equiv 1[41]$.

3-أ) تبين أن العددين A و B يقبلان القسمة على $2n + 3$.

لدينا: $A = 20n^2 + 36n + 9$ و $B = 6n^2 + 19n + 15$

ولدينا: $A = 20n^2 + 36n + 9 = (2n + 3)(10n + 3)$ ومنه A يقبل القسمة على $2n + 3$

$B = 6n^2 + 19n + 15 = (2n + 3)(3n + 5)$ ومنه B يقبل القسمة على $2n + 3$

(ب) إيجاد وبدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

نضع: $\text{PGCD}(A; B) = (2n + 3)\text{PGCD}(a; b)$ خاصية

نميز حالتان هما: $d = 1$ أو $d = 41$.

إذا كان $d = 41$ فإن $\text{PGCD}(A; B) = 41(2n + 3)$ حيث $n \equiv 12[41]$

إذا كان $d = 1$ فإن $\text{PGCD}(A; B) = (2n + 3)$ حيث $n \not\equiv 12[41]$ مع $k \in \mathbb{N}$

التمرين 51: دورة 2017

1) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $4^{5k} \equiv 1[11]$

لدينا: $4^5 = 1024 = 11 \cdot 93 + 1$ أي $4^5 \equiv 1[11]$

وعليه ومن أجل كل عدد طبيعي k يكون لدينا: $4^{5k} \equiv 1[11]$ خاصية.

2) استنتاج بواقي قسمة العدد 4^n على 11

لتعين بواقي قسمة 4^n على 11 نشكل الجدول التالي:

من الجواب السابق نستنتج أن بواقي قسمة 4^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وهي

| n | $5k$ | $5k + 1$ | $5k + 2$ | $5k + 3$ | $5k + 4$ |
|--------------|------|----------|----------|----------|----------|
| $4^n \equiv$ | 1 | 4 | 5 | 9 | 3 |

3) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 11$

لدينا: $2017^{5n+3} \equiv 4^{5n+3} [11] \equiv 9[11]$ و $1438^{10n} \equiv (8)^{10n} [11] \equiv 1[11]$
 ومنه: $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 2 \times 9 + 3 \times 1 + 1 [11]$
 أي $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 22 [11]$ إذن $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 0 [11]$
4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3$ قابلا للقسمة على 11
 $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3 \equiv 0 [11]$ معناه $2 \times 2017^{5n+2} \equiv 3 - n [11]$
 لدينا: $2017^{5n+2} \equiv 4^{5n+2} [11] \equiv 5 [11]$
 ومنه $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3 \equiv 0 [11]$ تكافئ $n + 7 \equiv 0 [11]$ أي $n = 11p + 4$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين 52: دورة 2017 الاستراكية

1) تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.
 لدينا: $3^0 \equiv 1 [5]$, $3^1 \equiv 3 [5]$, $3^2 \equiv 4 [5]$, $3^3 \equiv 2 [5]$, $3^4 \equiv 1 [5]$.
 بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

| $n =$ | $4k$ | $4k + 1$ | $4k + 2$ | $4k + 3$ |
|--------------|------|----------|----------|----------|
| $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 4 | 2 |

2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5.

لدينا: $1437 \equiv 2 [5]$ أي $1437 \equiv (-3) [5]$ أي $1437^{2017} \equiv (-3)^{2017} [5]$
 لكن $1437^{2017} \equiv (-3)^{2017} \equiv (-1)^{2017} \cdot 3^{4(504)+1} [5]$ ومنه $1437^{2017} \equiv (-3) [5]$
 لأن $3^{4(504)+1} \equiv 3 [5]$ و $(-1)^{2017} = -1$ (2017 عدد فردي)
 $1437^{2017} \equiv (-3) [5]$ تكافئ $1437^{2017} \equiv 2 [5]$ لأن $(-3) \equiv 2 [5]$
 ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2017} على 5 هو 2

3) البرهان أن: من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5

العدد $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1)$ مضاعف للعدد 5 معناه $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1) \equiv 0 [5]$
 لدينا: $48 \equiv 3 [5]$ ومنه $48^{4n+3} \equiv 3^{4n+3} [5]$ أي $48^{4n+3} \equiv 2 [5]$ حسب الجدول.
 $9^{2n+1} = 3^{4n+2} \equiv 4 [5]$ حسب الجدول.
 ومنه: $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1) \equiv 2 - 2 \times 4 + 1 [5] \equiv -5 [5]$ أي $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1) \equiv 0 [5]$ لأن $(-5) \equiv 0 [5]$.
 إذن $(48^{4n+3} - 2 \times 9^{2n+1} + 1) \equiv 0 [5]$ لأن $(-5) \equiv 0 [5]$.

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5.

العدد $(3^{4n} + 27^n - 4)$ قابلا للقسمة على 5 معناه $(3^{4n} + 27^n - 4) \equiv 0 [5]$
 لدينا: $27 \equiv (3)^{3n} [5]$ ولدينا أيضا: $3^{4n} \equiv 1 [5]$ حسب الجدول.
 وعليه $(3^{4n} + 27^n - 4) \equiv 0 [5]$ تكافئ $(3^{3n}) \equiv 3 [5]$

من الجدول ننتج أن $3n \equiv 1 [4]$ أي $n \equiv 3 [4]$ وأخيرا $n = 4p + 3$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين 53: دورة جوان 2016 الموضوع 1

1) إيجاد الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E)

$(x_0; y_0)^*$ حلا خاصا للمعادلة (E) بحيث $x_0 = y_0$ معناه $6x_0 - 7x_0 = -19$ أي $x_0 = y_0 = -19$

* لدينا:
$$\begin{cases} 6x - 7y = 19 \\ 6x_0 - 7x_0 = 19 \end{cases}$$
 بطرح المعادلتين طرف لطرف نجد:

ومنه: $6(x - x_0) = 7(y - y_0)$ (1) وتكافئ $6(x - x_0) - 7(y - y_0) = 0$

من (1) نستنتج أن: 6 يقسم $7(y - y_0)$ ومنه 6 يقسم $(y - y_0)$ لأن 6 أولي مع 7 (حسب غوص)

وعليه يكون لدينا: $(y - y_0) = 6k$ ومنه $y = 6k - 19$

بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x = 6k - 19$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = (7k - 19; 6k - 19)$ حيث k عدد صحيح

2) استنتاج قيم العدد الصحيح λ التي تحقق $\begin{cases} \lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6] \end{cases}$ ، ثم تعيين باقي قسمة العدد λ على 42

* لدينا:
$$\begin{cases} \lambda \equiv 24[7] \\ \lambda \equiv 5[6] \end{cases}$$
 تكافئ
$$\begin{cases} \lambda = 7\alpha + 24 \\ \lambda = 6\beta + 5 \end{cases}$$
 وتكافئ $6\beta - 7\alpha = 19 \dots (E')$

بالمطابقة بين المعادلتين (E) و (E') نستنتج أن: $\beta = x = 7k - 19$

وعليه يكون لدينا: $\lambda \equiv 6(7k - 19) + 5$ أي $\lambda \equiv 42k - 119$

* $\lambda \equiv 42k - 119$ تكافئ $\lambda \equiv 42k + 7$ لأن $-119 \equiv 7[42]$

ومنه باقي قسمة العدد λ على 42 هو 7.

3) تعيين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $|x + y - 1| \leq 13$

لدينا: $(x; y) = (7k - 19; 6k - 19)$ و $|x + y - 1| \leq 13$

ومنه: $|7k + 6k - 39| \leq 13$ وتكافئ $|13k - 39| \leq 13$ أي $|k - 3| \leq 1$ أي $2 \leq k \leq 4$

ومنه: $k \in \{2; 3; 4\}$ ومنه الثنائيات $(x; y)$ هي: $(-5; -7)$ ، $(2; -1)$ و $(9; 5)$

4-أ) دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7

لدينا: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

| $n =$ | $6k$ | $6k + 1$ | $6k + 2$ | $6k + 3$ | $6k + 4$ | $6k + 5$ |
|--------------|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $5^n \equiv$ | 1 | 5 | 4 | 6 | 2 | 3 |

ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} n - 5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6k+3 \equiv 5^{6k+3} + 4[7] \\ n \equiv 6k+3 \end{array} \right\} \text{وتكافئ} \left\{ \begin{array}{l} n-5^n \equiv 4[7] \\ n \equiv 3[6] \end{array} \right\} \text{تكافئ} \left\{ \begin{array}{l} n-5^n \equiv 2020[7] \\ n \equiv 1437[6] \end{array} \right\}$$

$$\text{وتكافئ} \left\{ \begin{array}{l} k \equiv 7p \\ n \equiv 6k+3 \end{array} \right\} \text{وتكافئ} \left\{ \begin{array}{l} k \equiv 0[7] \\ n \equiv 6k+3 \end{array} \right\}$$

ومنه $n = 42p + 3$ حيث p عدد طبيعي.

التمرين 54: دورة جوان 2015 الموضوع 1

(1-أ) تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد 8^n على 13.

لدينا: $8^4 \equiv 1[13]$ ، $8^3 \equiv 5[13]$ ، $8^2 \equiv 12[13]$ ، $8^1 \equiv 8[13]$ ، $8^0 \equiv 1[13]$
بواقي قسمة 8^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

| $n =$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|--------------|------|--------|--------|--------|
| $8^n \equiv$ | 1 | 8 | 12 | 5 |

(ب) استنتاج باقي القسمة الأقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13.

لدينا: $42 \equiv 3[13]$ و $138 \equiv 8[13]$ ومنه $138^{2015} \equiv 8^{2015}[13]$
لكن $2015 \equiv 3[4]$ ومنه $8^{2015} \equiv 8^3[13] \equiv 5[13]$ أي $138^{2015} \equiv 5[13]$
لدينا: $2014 \equiv 12[13]$ أي $2014 \equiv -1[13]$ لأن $12 \equiv -1[13]$.
ومنه: $2014^{2037} \equiv (-1)^{2037}[13] \equiv -1[13]$ أي $2014^{2037} \equiv (-1)[13]$ لأن 2037 عدد فردي.
وعليه: $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 3 \times 5 - 1 - 3[13] \equiv 11[13]$
 $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 11[13]$

إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13 هو 11.

(2-أ) تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6) \times 8^{2n} [13]$

لدينا: $64^n = 8^{2n}$ و $5 \equiv -8[13]$ ومنه $5^{2n+3} \equiv (-8)^{2n+3}[13]$
لكن $8^3 \equiv (-1)^{2n+3} \times 8^{2n} \times (-1)^{2n+3} \equiv (-1)^{2n+3} \times 8^{2n} \times (-1)^{2n+3} \equiv (-1)^{4n+6} \times 8^{2n} \equiv 1 \times 8^{2n} \equiv 8^{2n}[13]$
ومنه: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1) \times 8^{2n} + 5 \times 8^{2n} [13]$
أي: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6) \times 8^{2n} [13]$

(ب) تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$

من الجواب السابق لدينا: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6) \times 8^{2n} [13]$
ومنه: $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13] \Leftrightarrow (5n+6) \times 8^{2n} \equiv 0[13]$ تكافئ $(5n+6) \times 8^{2n} \equiv 0[13]$
وتكافئ $(5n+6) \equiv 0[13]$ لأن 8^{2n} أولي مع 13 وعليه 8^{2n} أولي مع 13 (خاصية)
 $(5n+6) \equiv 0[13] \Leftrightarrow 5n \equiv -6[13] \Leftrightarrow 5n \equiv 7[13]$ وتكافئ $5n \equiv 20[13]$ لأن $-6 \equiv 20[13]$
 $5n \equiv 20[13] \Leftrightarrow n \equiv 4[13]$ أي $n = 13p + 4$ حيث p عدد طبيعي.

التمرين 55 دورة جوان 2013 الموضوع 1

1- أ- تعيين $(x_0; y_0)$ ، حلول المعادلة (E) الذي يحقق: $x_0 + y_0 = -1$.

لدينا: الثنائية $(x_0; y_0)$ تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = -1 \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ -7x_0 - 7y_0 = 7 \end{cases}$

بالجمع طرف لطرف نجد: $4x_0 = 8$ ومنه: $x_0 = 2$ ولدينا: $y_0 = -1 - x_0 = -3$ ومنه الثنائية $(x_0; y_0) = (2; -3)$.

ب- استنتاج حلول المعادلة (E).

لدينا: الثنائية $(x_0; y_0) = (2; -3)$ حل خاص للمعادلة (E)

ومنه: $\begin{cases} 11x + 7y = 1 \\ 11(2) + 7(-3) = 1 \end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد: $11(x - 2) + 7(y + 3) = 0$

ولدينا: $11(x - 2) + 7(y + 3) = 0$ تكافئ (*) $11(x - 2) = 7(-y - 3)$

المعادلة (*) تعني أن $11(x - 2) / 7$ ومنه $(x - 2) / 7$ لأن 7 أولي مع 11 حسب مبرهنة غوص. أي: $x - 2 = 7k$ إذن $x = 7k + 2$ حيث k عدد صحيح.

بتعويض قيمة x في المعادلة (*) نجد: $11(7k) = 7(-y - 3)$ أي $y = -11k - 3$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = (7k + 2; -11k - 3)$

2- أ- تبيان أن $(a; -b)$ حل للمعادلة (E).

لدينا: $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$ وتكافئ $11a + 1 = 7b + 2$ وتكافئ $11a + 7(-b) = 1$

العلاقة $11a + 7(-b) = 1$ تعني أن الثنائية $(a; -b)$ حلا للمعادلة (E).

ب- تعيين باقي القسمة الأقليلية للعدد S على 77

من الجواب السابق لدينا: $(a; -b)$ حلا للمعادلة (E) ومنه: $(a; -b) = (7k + 2; -11k - 3)$

أي: $a = 7k + 2$ بتعويض قيمة a في المعادلة $S = 11a + 1$ نجد: $S = 11(7k + 2) + 1 = 77k + 23$

العلاقة $S = 77k + 23$ تعني أن 23 هو باقي قسمة S على 77.

التمرين 56: دورة جوان 2012 الموضوع 1

1- دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 11

لدينا: $9^0 \equiv 1[11]$ ، $9^1 \equiv 9[11]$ ، $9^2 \equiv 4[11]$ ، $9^3 \equiv 3[11]$ ، $9^4 \equiv 5[11]$ ، $9^5 \equiv 1[11]$

بواقي قسمة 9^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وحسب الجدول التالي

| | | | | | | |
|--------------|----|--------|--------|--------|--------|------|
| n = | 5k | 5k + 1 | 5k + 2 | 5k + 3 | 5k + 4 | |
| $9^n \equiv$ | 1 | 9 | 4 | 3 | 5 | [11] |

2- تعيين باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 .

لدينا: $2011 \equiv 9[11]$ ومنه $2011^{2012} \equiv 9^{2012}[11]$
 لكن: $2012 \equiv 2[5]$ ومنه $2011^{2012} \equiv 4[11]$ لأن $9^{2012} = 9^{5k+2} \equiv 4[11]$ انظر الجدول.
 ومنه باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 هو 4

3- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد: $2011^{2012} + 4 \times 2011^{10n} + 4 \times 9^{5n+1}$ يقبل القسمة على 11

لدينا: $9^{15n+1} = (9^{5n})^3 \times 9 \equiv 9[11]$ لأن $(9^{5n}) \equiv 1[11]$
 ولدينا: $2011^{10n} \equiv (9^{5n})^2[11] \equiv 1[11]$ ومنه $2011^{10n} \equiv 1[11]$ لأن $(9^{5n}) \equiv 1[11]$.
 ولدينا: $2011^{2012} \equiv 4[11]$ من الجواب السابق.
 وعليه: $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012} \equiv 4 \times 9 + 4 \times 1 + 4[11]$
 أي $4 \times 9 + 4 \times 1 + 4 = 44 = 4 \times 11$ لأن: $4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012} \equiv 0[11]$

4- تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد: $2011^{2012} + 2n + 2$ يقبل القسمة على 11

$2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0[11]$ يقبل القسمة على 11 معناه $2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0[11]$
 لدينا: $2011^{2012} + 2n + 2 \equiv 0[11]$ تكافئ $4 + 2n + 2 \equiv 0[11]$ لأن $2011^{2012} \equiv 4[11]$
 تكافئ $2n \equiv -6[11]$ أي $n \equiv -3[11]$
 ومنه: $n \equiv 8[11]$ إذن $n = 11\alpha + 8$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

التمرين 57: دورة جوان 2012 الموضوع 2

1- تبين أن العدد 153 حل للجملة (S).

لدينا: $\begin{cases} 153 = 15 \times 10 + 3 \\ 153 = 7 \times 21 + 6 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 153 \equiv 3[15] \\ 153 \equiv 6[7] \end{cases}$ أي أن 153 حل للجملة (S)

2- تبين أن: (x) حل لـ (S) ، يكافئ $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$

1) نبرهن أنه إذا كان x_0 حل لـ (S) و x حل للجملة (S) فإن: $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$

لدينا (1) $\begin{cases} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{cases}$ و x حل لـ (S) معناه (2) $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$

من (1) و (2) نستنتج ان $\begin{cases} x \equiv x_0[15] \\ x \equiv x_0[7] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$

2) نبرهن أنه إذا كان $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$ و x_0 حل لـ (S) فإن x حل للجملة (S)

$$\text{لدينا: (2) } \left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right\} \dots (1) \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{array} \right\} \dots$$

بجمع (1) و (2) طرف لطرف نجد: $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ ومعناه ان x حلا للجملة (S)

3- حل الجملة (S).

$$\text{لدينا: } \begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 7x \equiv 21[105] \dots (1) \\ 15x \equiv 90[105] \dots (2) \end{cases} \text{ وتكافئ نجد: } x \equiv 153[105] \text{ من الجواب (1)}$$

وأخيرا $x \equiv 48[105]$ لان $153 \equiv 48[105]$ إذن $x = 105k + 48$ حيث k عدد صحيح.

4- تعيين عدد الكتب

نفرض أن عدد الكتب هو x

ولدينا: استعمل علما تتسع لـ 15 كتابا بقي لديه 3 كتب معناه $x = 15\alpha + 3$

و إذا استعمل علما تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب معناه $x = 7\beta + 6$

ومنه x يحقق الجملة (S) حيث $500 < x < 600$

لدينا من الجواب (3) أن $x = 105k + 48$ ومنه $500 < 105k + 48 < 600$

لدينا: $500 < 105k + 48 < 600$ تكافئ $452 < 105k < 552$ أي $\frac{452}{105} < k < \frac{552}{105}$ ومنه $k = 5$

بتعويض قيمة k في المعادلة $x = 105k + 48$ نجد: $x = 573$

التمرين 58: دورة جوان 2011 الموضوع 2

1- التحقق أن : $4 \equiv -3[7]$ ثم تبين أن : $A_3 \equiv 6[7]$

لدينا: $7 \equiv 0[7]$ ومنه $4 + 3 \equiv 0[7]$ إذن $4 \equiv -3[7]$

لدينا: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ ومنه $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

ولدينا: $4 \equiv -3[7]$ و $5 \equiv -2[7]$ و $6 \equiv -1[7]$

ومنه : $A_3 \equiv 2^3 + 3^3 + (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3[7]$

ومنه $A_3 \equiv 2^3 + 3^3 - (3)^3 - (2)^3 - (1)^3[7]$ لان الأس فردي

إذن: $A_3 \equiv -1[7]$ ومعناه $A_3 \equiv 6[7]$ لأن $-1 \equiv 6[7]$.

2- دراسة، وحسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 2^n و 3^n على 7

دراسة بواقي قسمة قسمة 2^n على 7

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ ،

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| | | | |
|--------------|----|--------|--------|
| n = | 3k | 3k + 1 | 3k + 2 |
| $2^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 |

دراسة بواقي قسمة قسمة 3^n على 7

لدينا: $3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ و $3^6 \equiv 1[7]$
بواقي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

| | | | | | | |
|--------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| n = | 6k' | 6k'+1 | 6k'+2 | 6k'+3 | 6k'+4 | 6k'+5 |
| $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 |

3- تبيان أنه إذا كان n فرديا فإن: $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7.

لدينا: $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ حيث n عدد فردي أي $n = 2p + 1$

نعلم أن: $(-a)^{2p+1} = -a^{2p+1}$

ومنه: $A_n + 1 \equiv 0[7]$ وعليه $A_n = 2^{2p+1} + 3^{2p+1} - 3^{2p+1} - 2^{2p+1} - 1^{2p+1} = -1$

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7.

بما أن العدد 2011 عدد فردي فإن $A_{2011} + 1 \equiv 0[7]$ أي $A_{2011} \equiv 6[7]$ ومنه الباقي هو 6

4- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7.

لدينا: $A_{1432} = 2^{1432} + 3^{1432} + 4^{1432} + 5^{1432} + 6^{1432}$

نعلم أن: $(-a)^{2p} = a^{2p}$ ومنه: $A_{1432} = 2^{1432} + 3^{1432} + 3^{1432} + 2^{1432} + 1^{1432} = 2^{2864} + 2 \cdot 3^{1432} + 1$

ولدينا: $2864 = 3(954) + 2$ من الشكل $3k + 2$ و $1432 = 6(238) + 4$ من الشكل $6k' + 4$

ومنه: $A_{1432} = 2^{2864} + 2 \cdot 3^{1432} + 1 \equiv 4 + 2 \cdot 4 + 1[7] \equiv 11[7] \equiv 4[7]$ ومنه الباقي هو 6.

التمرين 59: دورة جوان 2010 الموضوع 1

1- تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3.

n العدد الطبيعي الذي يكتب في نظام العددي الأساس 7 كـ 11 α 00 :

حيث $n = \overline{11\alpha 00}$ عدد طبيعي و $0 \leq \alpha \leq 6$

ومنه: $n = \overline{11\alpha 00} = 1 \cdot 7^4 + 1 \cdot 7^3 + \alpha \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7^0 = 49\alpha + 2744$ في النظام العشري

* العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3 معناه $\alpha \equiv 0[3]$

$\alpha \equiv 0[3]$ معناه $49\alpha + 2744 \equiv 0[3]$ ولأن $49 \equiv 1[3]$ و $2744 \equiv 2[3]$ معناه $\alpha + 2 \equiv 0[3]$

$\alpha + 2 \equiv 0[3]$ تكافئ $\alpha \equiv 1[3]$ أي $\alpha = 3k + 1$ ومنه $\alpha = 4$ أو $\alpha = 1$ لأن: $0 \leq \alpha \leq 6$

2- تعيين العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5.

* العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5 معناه $\alpha \equiv 0[5]$

$2744 \equiv -1[5]$ و $49 \equiv -1[5]$ لأن $\alpha + 1 \equiv 0[5]$ ومعناه $49\alpha + 2744 \equiv 0[5]$ $\alpha \equiv 0[5]$ معناه $\alpha + 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $\alpha \equiv 4[5]$ أي $\alpha = 5k + 4$ ومنه $\alpha = 4$ لأن: $0 \leq \alpha \leq 6$

استنتاج العدد α حتى يكون n قابلاً للقسمة على 15.

العدد α حتى يكون n قابلاً للقسمة على 15 معناه n قابلاً للقسمة على 5 وعلى 3 معا (خاصية) ومنه: $\alpha = 4$ حسب الجواب 1 و 2 السابقين.

3- نأخذ: $\alpha = 4$ كتابة العدد n في النظام العشري.

لدينا: $n = 49\alpha + 2744$ في النظام العشري ومنه: $n = 49(4) + 2744 = 2940$

التمرين 60: دورة جوان 2010 الموضوع 2

1- تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 10^n على 13

$10^6 \equiv 1[13]$ و $10^5 \equiv 4[13]$ ، $10^4 \equiv 3[13]$ ، $10^3 \equiv 12[13]$ ، $10^2 \equiv 9[13]$ ، $10^1 \equiv 10[13]$ ، $10^0 \equiv 1[13]$ بواقي قسمة 10^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

| $n =$ | $6k'$ | $6k'+1$ | $6k'+2$ | $6k'+3$ | $6k'+4$ | $6k'+5$ |
|---------------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $10^n \equiv$ | 1 | 10 | 9 | 12 | 3 | 4 |

2- التحقق أن: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$.

لدينا: $2008 = 6(334) + 4$ من الشكل $6k' + 4$ ومنه $10^{2008} \equiv 3[13]$ حسب الجدول

ومنه: $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 3^2 + 3 + 1[13]$ أي $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 13[13]$

أي $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$

3- تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

لتعيين قيم العدد الطبيعي n نشكل الجدول التالي

| $n =$ | $6k'$ | $6k'+1$ | $6k'+2$ | $6k'+3$ | $6k'+4$ | $6k'+5$ |
|-----------------------------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $10^n \equiv$ | 1 | 10 | 9 | 12 | 3 | 4 |
| $10^{2n} \equiv$ | 1 | 9 | 3 | 1 | 9 | 3 |
| $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv$ | 3 | 7 | 0 | 1 | 0 | 7 |

من الجدول السابق نستنتج أن: $n = 6k' + 2$ أو $n = 6k' + 4$ حيث k' عدد طبيعي

التمرين 61: دورة جوان 2009 الموضوع 2

1- حل المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$.

تذكير: حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $y = c.e^{ax} - \frac{b}{a}$

وعليه حلول المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$ هو $y = c.e^{x \ln 2} = c.2^x$ حيث c عدد حقيقي ثابت

2- تعيين الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق: $f(0) = 1$. عين عبارة $f(x)$.

لدينا: $y = f(x) = c.2^x$ و $f(0) = 1$ ومنه: $c.2^0 = 1$ أي $c = 1$ إذن: $f(x) = 2^x$.

3- أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n .

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ ،

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| | | | |
|--------------|------|----------|----------|
| $n =$ | $3k$ | $3k + 1$ | $3k + 2$ |
| $2^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 |

ب) استنتاج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$.

لدينا: $f(2009) = 2^{2009}$ و لدينا: $2009 = 3(669) + 2$ من الشكل $3k + 2$

ومنه: $f(2009) - 4 \equiv 2^{3k+2} - 4[7]$ أي $f(2009) - 4 \equiv 0[7]$ لأن: $2^{3k+2} \equiv 4[7]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $f(2009) - 4$ هو 0

4- أ) حساب بدلالة n ، المجموع S_n

لدينا: $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) = 2^0 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$

ومنه S_n هو مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 2

$$\text{وعليه: } S_n = 1 \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها S_n يقبل القسمة على 7

S_n يقبل القسمة على 7 معناه $S_n \equiv 0[7]$

$S_n \equiv 0[7]$ معناه $2^{n+1} \equiv 1[7]$ ومنه $n + 1 = 3k$ حسب الجدول ومنه $n = 3k - 1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$

التمرين 62: دورة جوان 2008 الموضوع 1

أ- تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

نضع: $d = \text{PGCD}(a; b)$ نلاحظ أن: $b - 2a = 7$

لدينا: d يقسم a ويقسم b ومنه d يقسم الفرق $b - 2a$ وعليه d يقسم 7 ومنه: $d = 1$ أو $d = 7$

ب- تبين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n + 5$ ضاعفا للعدد 7.

$$\text{لدينا العددين } a \text{ و } b \text{ من مضاعفات 7 معناه } \begin{cases} a \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[7] \end{cases} \text{ ويكافئ } \begin{cases} 2n + 3 \equiv 0[7] \dots (1) \\ n - 2 \equiv 0[7] \dots (2) \end{cases}$$

ب طرح (2) من (1) طرف لطرف نجد $n + 5 \equiv 0[7]$ ويكافئ $n + 5$ ضاعفا للعدد 7.

ج- تعيين قيم n التي من أجلها $PGCD(a; b) = 7$.

$$PGCD(a; b) = 7 \text{ معناه } \begin{cases} 2n+3 \equiv 0[7] \dots (1) \\ n-2 \equiv 0[7] \dots (2) \end{cases} \text{ ومعناه } n+5 \equiv 0[7] \text{ حسب الجواب السابق}$$

$$n+5 \equiv 0[7] \text{ تكافئ } n+5 = 7k \text{ أي } n = 7k+2 \text{ حيث } k \text{ عدد طبيعي أكبر من } 0$$

أ- تبين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$

$$\text{لدينا: } p = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)(2n+3) \text{ ومنه } p \text{ مضاعف للعدد } n-5$$

$$q = n^2 - 7n + 10 = (n-5)(n-2) \text{ ومنه } q \text{ مضاعف للعدد } n-5$$

ب- تعيين تبعاً لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p; q)$.

$$\text{لدينا: } p = 2n^2 - 7n - 15 = (n-5)b \text{ و } q = n^2 - 7n + 10 = (n-5)a$$

$$\text{ومنه: } PGCD(p; q) = (n-5)PGCD(a; b) \text{ خاصية}$$

$$\text{ولدينا: } PGCD(a; b) = 1 \text{ أو } PGCD(a; b) = 7 \text{ حسب الجواب أ) ومنه نميز حالتين هما:}$$

$$\text{الحالة 1: } PGCD(a; b) = 1 \text{ ومنه } PGCD(p; q) = (n-5) \text{ حيث } n \text{ أكبر من } 5 \text{ مع } n \neq 7k+2$$

$$\text{الحالة 2: } PGCD(a; b) = 7 \text{ ومنه } PGCD(p; q) = 7(n-5) \text{ حيث } n \text{ أكبر من } 5 \text{ مع } n = 7k+2$$

التمرين 63: دورة جوان 2008 الموضوع 2

1) التأكد أن الثنائية $(82; 1)$ حلا للمعادلة (1). ثم حل المعادلة (1)

$$* \text{ الثنائية } (82; 1) \text{ حلا للمعادلة (1) لأن: } 4(82) - 9(1) = 319$$

$$* \text{ لدينا: } \begin{cases} 4x - 9y = 319 \dots (1) \\ 4(82) - 9(1) = 319 \dots (2) \end{cases} \text{ بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: } 4(x - 82) - 9(y - 1) = 0$$

$$\text{ومنه: } 4(x - 82) = 9(y - 1) \dots (*)$$

$$\text{من (*) نستنتج أن: } 4(x - 82) \text{ يقسم } 9 \text{ ومنه } 9 \text{ يقسم } (x - 82) \text{ لأن } 9 \text{ أولي مع } 4 \text{ (حسب مبرهنة غوص)}$$

$$\text{ومنه: } (x - 82) = 9k \text{ أي } x = 9k + 82 \text{ وبعد تعويض قيمة } x \text{ في (*) نجد: } y = 4k + 1$$

$$\text{ومنه الحلول هي الثنائيات } (x; y) \text{ حيث: } (x; y) = (9k + 82; 4k + 1) \text{ مع أن } k \text{ عدد صحيح.}$$

2) تعيين الثنائيات $(a; b)$ الصحيحة حلول المعادلة: $4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (2)$

$$\text{لدينا: } 4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (2) \text{ تكافئ } (2a - 3b)(2a + 3b) = 319$$

لدينا: $319 = 11 \times 29$ ومنه عدد القواسم هو $(1+1)(1+1) = 4$ ومنه: $D_{319} = \{1; 11; 29; 319\}$
 ملاحظة 1: إذا كانت الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (2) فإن الثنائية $(-a; -b)$ حلا أيضا.
 ومنه يمكن البحث عن الحلول الموجبة فقط .
 ملاحظة 2: $2a - 3b > 2a + 3b$

الحالة 1: $(2a - 3b)(2a + 3b) = 1 \times 319$ وتكافئ: $\begin{cases} 2a - 3b = 1 \dots (1) \\ 2a + 3b = 319 \dots (2) \end{cases}$ بجمع (1) و (2) طرف

لطرف نجد: $4a = 320$ ومنه: $a = 80$ وبعد تعويض قيمة a في (1) نجد: $b = 53$

الحالة 2: $(2a - 3b)(2a + 3b) = 11 \times 29$ وتكافئ: $\begin{cases} 2a - 3b = 11 \dots (1) \\ 2a + 3b = 29 \dots (2) \end{cases}$ بجمع (1) و (2) طرف

لطرف نجد: $4a = 40$ ومنه: $a = 10$ وبعد تعويض قيمة a في (1) نجد: $b = 3$

ومنه الثنائيات $(a; b)$ هي:

$(80; 53)$ ، $(-80; -53)$ ، $(80; -53)$ ، $(-80; 53)$ ، $(10; 3)$ ، $(-10; -3)$ ، $(-10; 3)$ و $(10; -3)$

استنتاج الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

$4a^2 - 9b^2 = 319 \dots (2)$ تكافئ $4x_0 - 9y_0 = 319 \dots (2)$ حيث $x_0 = a^2$ و $y_0 = b^2$

ومنه الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (1) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين هي:

$(640; 2809)$ و $(100; 9)$

1) اثبات أن العددين a ، b أوليان فيما بينهما.

العددين a ، b أوليان فيما بينهما معناه وجود عددين صحيحين α و β يحققان $\alpha a + \beta b = 1$ لدينا: $6a - 4b = 3(4n+1) - 2(6n+1) = 1$ ومنه a ، b أوليان فيما بينهما حسب مبرهنة بيزو

2- اثبات أن α يقسم 5 ، ثم تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\alpha = 5$

اثبات أن α يقسم 5

α القاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 4n+1$ و $c = 3n+2$

α يقسم a ومنه α يقسم $3a$ ، α يقسم b ومنه α يقسم $4b$ ومنه α يقسم $4b - 3a$

لكن $4b - 3a = 4(3n+2) - 3(4n+1) = 5$ ومنه α يقسم 5

تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $\alpha = 5$

$\alpha = 5$ معناه $a = 4n+1 \equiv 0[5]$ و $c = 3n+2 \equiv 0[5]$ ومنه $a - c = n - 1 \equiv 0[5]$

$n - 1 \equiv 0[5]$ تكافئ $n \equiv 1[5]$ ومنه $n = 5p + 1$ حيث p عدد طبيعي

3- أ) اثبات أن α يقسم β .

لدينا: β القاسم المشترك الأكبر للعددين a و cb

ولدينا: α القاسم المشترك الأكبر للعددين a و c ومنه α يقسم كلا من a و cb

ومنه α يقسم القاسم المشترك للعددين a و cb أي α يقسم β .

ب) اثبات أن العددين β و b أوليان فيما بينهما ، ثم استنتج أن $\beta = \alpha$.

اثبات أن العددين β و b أوليان فيما بينهما

نضع: $\text{PGCD}(b; \beta) = d$ ونبين أن $d = 1$

ولدينا من الجواب السابق أن α يقسم β ومنه $\beta = k\alpha = k'a$ لأن α يقسم a

وعليه $\text{PGCD}(b; \beta) = d$ تكافئ $\text{PGCD}(b; k'a) = d$

نعلم أن $\text{PGCD}(b; k'a) = \text{PGCD}(b; a)$ لكن $\text{PGCD}(b; a) = 1$ ومنه $d = 1$

استنتاج أن $\beta = \alpha$

لدينا: β يقسم cb و من الجواب السابق $\text{PGCD}(b; \beta) = 1$ ومنه β يقسم c حسب مبرهنة غوص

β يقسم c و β يقسم b ومنه β يقسم α (1)..... لدينا α يقسم β (2).....

من (1) و (2) نستنتج أن $\beta = \alpha$

4- أ) تبين أن كلا من العددين A و B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$.

لدينا: $A = 4n^2 - 3n - 1 = (n-1)(4n+1) = (n-1)a$ ومعناه A مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$.

$B = 18n^3 - 3n^2 - 13n - 2 = (n-1)(18n^2 + 15n + 2) = (n-1)bc$ ومعناه B مضاعف للعدد الطبيعي $(n-1)$

ب) التعبير حسب قيم α عن d بدلالة n

لدينا: $PGCD(a;bc)=\beta$ لأن $d=PGCD(A;B)=(n-1)PGCD(a;bc)=(n-1)\beta$

ومنه $\beta=\alpha$ لأن $d=PGCD(A;B)=(n-1)PGCD(a;bc)=(n-1)\alpha$

لكن α يقسم 5 وعليه $\alpha=5$ أو $\alpha=1$ ومنه نميز حالتين هما

الحالة 1: $\alpha=5$ ومعناه $d=5(n-1)$ الحالة 2: $\alpha=1$ ومعناه $d=(n-1)$

التمرين 65: دورة 2020 م

1) حل المعادلة: $3x-5y=2$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان.

المعادلة: $3x-5y=2$ تكافئ $3x=5y+2$ تكافئ $3x \equiv 2[5]$

$3x \equiv 2[5]$ تكافئ $3x \equiv 12[5]$ لأن $12 \equiv 2[5]$ ومنه $x \equiv 4[5]$ لأن 3 أولي مع 5

$x \equiv 4[5]$ تكافئ $x = 5k + 4$ حيث k عدد صحيح

بتعويض قيمة x في المعادلة $3x=5y+2$ نجد: $3(5k+4)=5y+2$ ومنه $3.5k+10=5y$ أي $y=3k+2$

ومنه حلول المعادلة $3x-5y=2$ هي الثنائيات $(x; y)=(5k+4; 3k+2)$ حيث k عدد صحيح

2- أ) دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 9^n على 7.

لدينا: $9^0 \equiv 1[7]$ ، $9^1 \equiv 9[7]$ ، $9^2 \equiv 4[7]$ ، $9^3 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 9^n على 7 تشكل متتالية دورية

ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| | | | |
|--------------|-----------|---------------|---------------|
| $n =$ | 3α | $3\alpha + 1$ | $3\alpha + 2$ |
| $9^n \equiv$ | 1 | 9 | 4 |

ب) دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي 4^n على 11.

لدينا: $4^0 \equiv 1[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$ ، $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^4 \equiv 3[11]$ ، $4^5 \equiv 1[11]$

بواقي قسمة 4^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وحسب الجدول التالي

| | | | | | |
|--------------|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| n | 5β | $5\beta + 1$ | $5\beta + 2$ | $5\beta + 3$ | $5\beta + 4$ |
| $4^n \equiv$ | 1 | 4 | 5 | 9 | 3 |

ج) تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون: $14.4^n + 11.9^n - 4 \equiv 0[77]$

لدينا: $14.4^n + 11.9^n - 4 \equiv 0[77]$ تكافئ $\begin{cases} 14.4^n + 11.9^n - 4 \equiv 0[7] \\ 14.4^n + 11.9^n - 4 \equiv 0[11] \end{cases}$ لأن 7 و 11 أوليان فيما بينهما

1) $14.4^n + 11.9^n - 4 \equiv 0[7]$ تكافئ $4.9^n - 4 \equiv 0[7]$ لأن $14 \equiv 0[7]$ و $11 \equiv 4[7]$

$4.9^n - 4 \equiv 0[7]$ تكافئ $4.9^n \equiv 4[7]$ وتكافئ $4.9^n \equiv 32[7]$ وتكافئ $9^n \equiv 1[7]$ ومنه $n=3\alpha$

2) $14.4^n + 11.9^n - 4 \equiv 0[11]$ تكافئ $3.4^n - 4 \equiv 0[11]$ لأن $14.9^n \equiv 0[11]$ و $11 \equiv 3[11]$

$3.4^n - 4 \equiv 0[11]$ تكافئ $3.4^n \equiv 4[11]$ وتكافئ $3.4^n \equiv 15[11]$ لأن $15 \equiv 4[11]$ ومنه $4^n \equiv 5[11]$ ومنه $n=5\beta+2$

من 1) و 2) نستنتج أن: $3\alpha=5\beta+2$ أي $3\alpha-5\beta=2$

بعد المطابقة بين المعادلتين $3x-5y=2$ و $3\alpha-5\beta=2$ نستنتج أن $x=\alpha=5k+4$ ومنه $n=15k+12$

3- أ) التعبير عن S_n بدلالة n .

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{15n}$ حيث $u_n = 3.4^n + 4.9^n$

نضع $u_n = v_n + w_n$ حيث $v_n = 3.4^n$ و $w_n = 4.9^n$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول $v_1 = 12$

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q' = 9$ وحدها الأول $u_1 = 36$

ومنه $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{15n} = (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + \dots + (v_{15n} + w_{15n})$

ومنه $S_n = (v_1 + v_2 + \dots + v_{15n}) + (w_1 + w_2 + \dots + w_{15n})$

$$S_n = v_1 \left[\frac{q^{15n} - 1}{q - 1} \right] + w_1 \left[\frac{q'^{15n} - 1}{q' - 1} \right] = 12 \left[\frac{4^{15n} - 1}{4 - 1} \right] + 36 \left[\frac{9^{15n} - 1}{9 - 1} \right] \text{ أي}$$

$$S_n = 4(4^{15n} - 1) + \frac{9(9^{15n} - 1)}{2} = \frac{8.4^{15n} + 9.9^{15n} - 17}{2} \text{ بعد التبسيط نجد:}$$

ب) اثبات أن S_n مضاعف للعدد 77.

S_n مضاعف للعدد 77 معناه $S_n \equiv 0[77]$ و $S_n \equiv 0[11]$ لأن 7 و 11 أوليان فيما بينهما

$$8.4^{15n} + 9.9^{15n} - 17 \equiv 0[7] \text{ ومعناه } 2S_n \equiv 0[7] \text{ معناه } S_n \equiv 0[7] \quad (1)$$

$$\text{ومعناه } 4^{15n} + 2.9^{15n} + 4 \equiv 0[7] \text{ لأن } 4 \equiv 1[7] \text{ و } 8 \equiv 1[7] \text{ و } 9 \equiv 2[7] \text{ و } -17 \equiv 4[7]$$

لدينا: $9^{15n} = (9^5)^3 \equiv 1[7]$ و $4^{15n} = (4^3)^5 \equiv 1[7]$ لأن $4^3 = 64 \equiv 1[7]$

$$\text{ومنه } 4^{15n} + 2.9^{15n} + 4 \equiv 1 + 2.1 + 4 \equiv 7 \equiv 0[7] \text{ أي } 4^{15n} + 2.9^{15n} + 4 \equiv 0[7]$$

$$8.4^{15n} + 9.9^{15n} - 17 \equiv 0[11] \text{ ومعناه } 2S_n \equiv 0[11] \text{ معناه } S_n \equiv 0[11] \quad (2)$$

لدينا: $4^{15n} \equiv 1[11]$ و $-17 \equiv 4[11]$ و $9^{15n} = (9^5)^3 \equiv 1[11]$ لأن $9^5 \equiv 1[11]$

$$\text{ومنه } 8.4^{15n} + 9.9^{15n} - 17 \equiv 8 + 9 + 4 \equiv 21 \equiv 0[11] \text{ ومعناه } 8.4^{15n} + 9.9^{15n} - 17 \equiv 0[11]$$

التمرين 66: دورة 2019 م 1

1) حل المعادلة $505x - 673y = 1 \dots (E)$.

من الكتابة $(2019 = 3 \times 673 \text{ و } 2020 = 4 \times 505)$ نستنتج ان $(505.4 - 673.3 = 1 \dots (E'))$

وعليه الشئانية (3;4) حل خاص للمعادلة (E)

$$\text{لدينا: } \begin{cases} 505x - 673y = 1 \dots (E) \\ 505.4 - 673.3 = 1 \dots (E') \end{cases} \text{ بالطرح طرف لطرف نجد: } 505(x - 4) - 673(y - 3) = 0$$

$$\text{ولدينا: } 505(x - 4) - 673(y - 3) = 0 \dots (*) \text{ تكافئ } 505(x - 4) = 673(y - 3)$$

(*) تعني أن $673 / 505(x - 4)$ ومنه $673 / (x - 4)$ لأن 367 أولي مع 505 حسب مبرهنة غوص.

أي: $x - 4 = 673k$ إذن $x = 673k + 4$ حيث k عدد صحيح.

بتعويض قيمة x في المعادلة (*) نجد: $505(673k) = 673(y - 3)$ أي $y = 505k + 3$

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = (673k + 4; 505k + 3)$ حيث k عدد صحيح.

(2) تبين أنه من أجل كل ثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x و y من نفس الإشارة.

x و y من نفس الإشارة معناه $(x; y) = (673k + 4)(505k + 3) = 339865k^2 + 1178k + 12 > 0$ لأن المميز $\Delta < 0$ ومعامل k^2 موجب.

(3) كتابة u_α بدلالة α ثم كتابة v_β بدلالة β .

لدينا: (u_n) و (v_n) متاليتان المعرفتان على \mathbb{N} بـ: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = v_n + 673 \end{cases}$

لدينا $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 505 \end{cases}$ تكافئ $(1) \dots \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} - u_n = 505 \end{cases}$ و $(2) \dots \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} - v_n = 673 \end{cases}$

من الجملتين (1) و (2) نستنتج أن:

المتتالية (u_n) حسابية أساسها 505 وحدها الأول 3 وعليه $u_\alpha = u_0 + \alpha r$ أي $u_\alpha = 3 + 505\alpha$

المتتالية (v_n) حسابية أساسها 673 وحدها الأول 4 وعليه $v_\beta = v_0 + \beta r$ أي $v_\beta = 4 + 673\beta$

4- (أ) تبين أن الحدود المشتركة تشكل متتالية حسابية (w_n) يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

* الحدود المشتركة للمتاليتين (u_n) و (v_n) هي حدود المتتالية (w_n) وتحقق: $u_\alpha = v_\beta$

$u_\alpha = v_\beta$ تكافئ $3 + 505\alpha = 4 + 673\beta$ وتكافئ $505\beta - 673\alpha = 1$ ومعناه $\alpha = y$ و $\beta = x$

وعليه وحسب الجواب (1) نستنتج أن: $(\beta; \alpha) = (673k + 4; 504k + 3)$ حيث k عدد طبيعي

وعليه الحدود المشتركة هي حدود المتتالية (w_n) حيث: $w_k = 3 + 505(673k + 4) = 339865k + 2023$

** لدينا: $w_{k+1} - w_k = 339865(k + 1) - 339865k = 339865$

وعليه المتتالية (w_n) حسابية أساسها 339865 وحدها الأول 2023

(ب) حساب بدلالة n الجداء P

لدينا: $P = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \dots X_n$ حيث $X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023)$

$$X_n = \frac{1}{505}(w_n - 2023) = \frac{1}{505}(339192n) = \frac{1}{505}(505 \times 673n) = 673n$$

ومنه: $P = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \dots X_n = (673)^n (1.2.3 \dots n) = (673)^n \cdot n!$

التمرين 67: دورة 2019 الموضوع (2)

1- (أ) التحقق أن من أجل كل عدد طبيعي n : $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$

(u_n) متتالية عددية حدودها معرفة بحدّها الأول $u_1 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$

$u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + 1$ تكافئ $(\sqrt{u_{n+1}})^2 = (\sqrt{u_n})^2 + 2\sqrt{u_n} + 1$ وتكافئ $(\sqrt{u_{n+1}})^2 = (\sqrt{u_n} + 1)^2$

وتكافئ $(\sqrt{u_{n+1}}) = (\sqrt{u_n} + 1)$ أي $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ وهو المطلوب

(ب) استنتاج كتابة الحد العام u_n بدلالة n .

بوضع : $\sqrt{u_n} = k_n$ فإن $\sqrt{u_{n+1}} = k_{n+1}$ ومنه $\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n} = 1$ تكافئ $k_{n+1} - k_n = 1$ ومنه نستنتج أن المتتالية (k_n) حسابية أساسها 1 وحدها الأول $k_1 = 0$ أي $k_n = n - 1$ وعليه $\sqrt{u_n} = k_n = n - 1$ ومنه $u_n = (n - 1)^2$

(2) التحقق أنه: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_n = n(n - 2) + 1$

لدينا: $u_n = n(n - 2) + 1$ تكافئ $u_n = n^2 - 2n + 1 = (n - 1)^2$ وهو المطلوب

(3) تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها: $(n - 2)$ يقسم $(n - 5)$

لدينا: $(n - 2)$ يقسم $(n - 5)$ معناه $\frac{n - 5}{n - 2}$ عدد صحيح نسبي

لكن $\frac{n - 5}{n - 2} = 1 - \frac{3}{n - 2}$ ومعناه $\frac{3}{n - 2}$ عدد صحيح نسبي ومعناه ان $(n - 2)$ يقسم 3

$(n - 2)$ يقسم 3 معناه $(n - 2) \in D_3 = \{-3; -1; 1; 3\}$ ومنه $n \in \{1; 3; 5\}$

4-أ) تبيان أن: $\text{PGCD}(n - 2; u_n) = 1$

لدينا: $u_n = n(n - 2) + 1$ معناه $u_n - n(n - 2) = 1$

معناه وجود ثنائية $(1; n)$ تحقق: $u_n - n(n - 2) = 1$

ومنه وحسب مبرهنة بيزو $\text{PGCD}(n - 2; u_n) = 1$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها : $(n - 2)(n^2 + 1)$ يقسم $(n - 5)u_n$

لدينا: $(n - 2)(n^2 + 1)$ يقسم $(n - 5)u_n$ و $\text{PGCD}(n - 2; u_n) = 1$ ومنه وحسب مبرهنة غوص

فإن $(n - 2)$ يقسم $(n - 5)$ ومنه $n \in \{1; 3; 5\}$ حسب ما ورد في الجواب (3) لأن $n \geq 2$

التمرين 68: دورة 2018

(1) تعيين العددين α و β ن ثم بين أن العددين $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما.

*لدينا: α و β عددان طبيعيان بحيث: $\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \alpha + \beta = 4035 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} \alpha = 2018 \\ \beta = \alpha - 1 = 2017 \end{cases}$

** العددان $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما معناه $\frac{\alpha}{2}x_0 + \beta y_0 = 1$ حيث $(x_0; y_0) \in \mathbb{Z}^2$ حسب بيزو

لدينا: $1009x_0 + 2017y_0 = 1$ حيث $(x_0; y_0) = (2; -1)$ وعليه العددان $\frac{\alpha}{2}$ و β أوليان فيما بينهما

ملاحظة: يمكن اثبات ان $\text{PGCD}(\beta; \frac{\alpha}{2}) = 1$

(2) تعيين كل الثنائيات الصحيحة $(x; y)$ التي تحقق المعادلة : $1009x - 2017y = 1$.

من الجواب السابق لدينا: $1009(2) + 2017(-1) = 1$ والتي تكافئ $1009(2) - 2017(1) = 1$

$$1009x - 2017y = 1 \dots (1) \text{ حل خاص للمعادلة } (2; -1) \text{ الثانية تعني أن } 1009(2) - 2017(1) = 1$$

$$\text{* لدينا: } \begin{cases} 1009x - 2017y = 1 \\ 1009(2) - 2017(1) = 1 \end{cases} \text{ بطرح المعادلتين طرف لطرف نجد:}$$

ومنه: $1009(x - 2) = 2017(y - 1) \dots (1)$ وتكافئ $1009(x - 2) - 2017(y - 1) = 0$
 من (1) نستنتج أن: 1009 يقسم $2017(y - 1)$ ومنه 1009 يقسم $(y - 1)$ لأن 2017 أولي مع 1009
 وعليه يكون لدينا: $(y - 1) = 1009k$ ومنه $y = 1009k + 1$
 بتعويض قيمة y في المعادلة (1) نجد: $x = 2017k + 2$
 ومنه حلول المعادلة هي: $(x; y) = (2017k + 2; 1009k + 1)$ حيث k عدد صحيح

$$(3) \text{ تعيين الأعداد الصحيحة } a \text{ التي تحقق الجملة: } \begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases}$$

$$\text{الجملة: } \begin{cases} a \equiv 2019[2017] \\ a \equiv 2019[1009] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a \equiv 2[2017] \\ a \equiv 1[1009] \end{cases} \text{ لأن } 2019 \equiv 2[2017] \text{ و } 2019 \equiv 1[1009]$$

$$\text{وعليه } \begin{cases} a = 2017\alpha + 2 \\ a = 1009\beta + 1 \end{cases} \text{ ومنه } 1009\beta - 2017\alpha = 1 \dots (2)$$

بمطابقة المعادلتين (1) و (2) نستنتج أن: $\alpha = y = 1009k + 1$ و $\beta = x = 2017k + 2$
 ومنه: $a = 2017(1009k + 1) + 2 = 2035153k + 2019$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

4-أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

$$\text{لدينا: } 7^0 \equiv 1[9], 7^1 \equiv 7[9], 7^2 \equiv 4[9], 7^3 \equiv 1[9]$$

بواقي قسمة 7^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| | | | |
|--------------|------|----------|----------|
| $n =$ | $3k$ | $3k + 1$ | $3k + 2$ |
| $7^n \equiv$ | 1 | 7 | 4 |

ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $42L$ على 9.

لدينا L عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كمايلي: $L = \overline{111\dots 1}$
 ومنه: $L = \overline{111\dots 1} = 7^0 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{2017}$

L هو مجموع متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 7 وعليه: $L = \frac{7^{2018} - 1}{6}$

$$L = \frac{7^{2018} - 1}{6} \text{ تكافئ } 42L = 7^{2019} - 7 \text{ وذلك بعد ضرب الطرفين في } 42$$

$$7^{2019} - 7 \equiv 0[9] \text{ لأن } 7^{2019} \equiv 7[9]$$

التمرين 69: دورة 2017 م 1

1-أ) حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 ثم تبين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً

* لحساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 نستعمل طريقة خوارزمية أقليدس أو طريقة جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين.

الطريقة 1: $104 = 20 \times 5 + 4$ و $20 = 4 \times 5 + 0$

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 هو 4 آخر باقي غير معدوم

الطريقة 2: $104 = 2^3 \times 13$ و $20 = 2^2 \times 5$

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 104 و 20 هو $2^2 = 4$ العوامل المشتركة وبأصغر أس.

* لدينا: $104x - 20y = 272 \dots (E)$

المعادلة (E) تقبل حلولاً لأن الق.م.أ للعددين 104 و 20 يقسم العدد 272 لأن: $272 = 4 \times 68$

ب-تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$

لدينا المعادلة (E) تكافئ $26x - 5y = 68 \dots (E')$ وذلك بعد تقسيم طرف المعادلة (E) على 4

ولدينا أيضاً (E') تكافئ $26x = 68 + 5y$ أي $26x \equiv 68[5]$

ومنه $x \equiv 3[5]$ لأن $26 \equiv 1[5]$ و $68 \equiv 3[5]$.

استنتاج حلول المعادلة (E)

المعادلتين (E) و (E') لهما نفس الحلول لأنهما متكافئتين

وعليه ومن الجواب السابق لدينا: $x \equiv 3[5]$ ومعناه $x = 5k + 3$ حيث k عدد صحيح.

من المعادلة (E') لدينا $5y = -68 + 26x$ وبعد تعويض قيمة x نجد:

$5y = -68 + 26(5k + 3) = 5(21k + 2)$ أي $y = 21k + 2$

والخلاصة حلول المعادلة (E) هي: $(x; y) = (5k + 3; 21k + 2)$ حيث k عدد صحيح.

(2) تعيين α و β ثم أكتابة λ في النظام العشري.

* لدينا: λ يكتب $1\alpha\alpha\beta 01$ في النظام الذي أساسه 4.

ومنه: $\lambda = 1 \times 4^5 + \alpha \times 4^4 + \alpha \times 4^3 + \beta \times 4^2 + 1 = 1025 + 320\alpha + 16\beta \dots (1)$

ولدينا أيضاً λ يكتب $1\alpha\beta 01$ في النظام الذي أساسه 6

ومنه: $\lambda = 1 \times 6^4 + \alpha \times 6^3 + \beta \times 6^2 + 1 = 1267 + 216\alpha + 36\beta \dots (2)$

من (1) و (2) نجد: $1025 + 320\alpha + 16\beta = 1267 + 216\alpha + 36\beta$

وبعد التبسيط نجد: $104\alpha - 20\beta = 272$ حيث $0 \leq \alpha \leq 3$ و $0 \leq \beta \leq 3$

بمطابقة المعادلة $104\alpha - 20\beta = 272$ مع المعادلة $104x - 20y = 272 \dots (E)$

نسنتج أن: $\alpha = x = 5k + 3$ و $\beta = y = 21k + 2$

وبما أن $0 \leq \alpha \leq 3$ و $0 \leq \beta \leq 3$ نستنتج أن: $k = 0$ وعليه يكون: $(\alpha; \beta) = (3; 2)$

* لدينا: $\lambda = 1025 + 320\alpha + 16\beta$ حيث $(\alpha; \beta) = (3; 2)$ ومنه $\lambda = 2017$.

(3) التحقق أن كلا من 1009 و 2017 عدد أولي

لدينا: $\sqrt{1009} = 31,76$ و $\sqrt{2017} = 44,91$

العدد 2017 أوي لأنه لا يقبل القسمة على كلا من الأعداد الأولية الأصغر من 43

العدد 1009 أوي لأنه لا يقبل القسمة على كلا من الأعداد الأولية الأصغر من 31

تعيين الثنائيات (a;b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $2m - d = 2017$

لدينا: $d = \text{PGCD}(a;b)$ و $m = \text{PPCM}(a;b)$

ونعلم أن: $d = \text{PGCD}(a;b)$ تكافئ $a = a' \cdot d$ و $b = b' \cdot d$ حيث $\text{PGCD}(a';b') = 1$

ونعلم أن: $m \times d = a \times b$ أي $m = d \times a' \times b'$

بعد تعويض قيمة $m = d \times a' \times b'$ في العلاقة $2m - d = 2017$ نجد: (*) $2a' \times b' - 1 = \frac{2017}{d}$

من العلاقة (*) نستنتج أن: d يقسم العدد 2017 أي $d = 1$ أو $d = 2017$ لأن 2017 أوي

الحالة 1: من أجل $d = 1$ العلاقة (*) تكافئ $a' \times b' = 1009$

وعليه $(a';b') = (1;1009)$ أو $(a';b') = (1009;1)$ لأن 1009 أوي

الحالة 2: من أجل $d = 2017$ العلاقة (*) تكافئ $a' \times b' = 1$

لا توجد قيم للعددين a' و b'

من الحالة 1 نستنتج أن: $(a;b) = (1;1009)$ أو $(a;b) = (1009;1)$

التمرين 70: دورة 2017 م

1) البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 7^{n+1} - 4$.

(u_n) معرفة بحدّها الأول: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 7u_n + 8$.

*التحقق من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$ يكون لدينا: $3u_0 = 3$ محققة لأن $u_0 = 1$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $3u_n = 7^{n+1} - 4$ ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 7u_n + 8$ ومنه $3u_{n+1} = 7(3u_n) + 24$

ولدينا من فرضية التراجع $3u_n = 7^{n+1} - 4$ وعليه $3u_{n+1} = 7(7^{n+1} - 4) + 24$

أي $3u_{n+1} = 7 \cdot 7^{n+1} - 28 + 24$ وأخيرا $3u_{n+1} = 7^{n+2} - 4$

ومنه الخاصية $3u_n = 7^{n+1} - 4$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

2) أ- حساب بدلالة n المجموع S_n .

$S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$ هو مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها 7

ومنه: $S_n = 1 \left(\frac{7^{n+1} - 1}{7 - 1} \right) = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$

إيجاد علاقة بين S_n و S'_n .

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ولدينا أيضا $3u_n = 7^{n+1} - 4$

ومنه: $3S'_n = 3u_0 + 3u_1 + \dots + 3u_n$

$$3S_n' = [(7-4) + (7^2-4) + \dots + (7^{n+1}-4)] = 7(1+7+7^2+\dots+7^n) - 4(n+1) \text{ أي}$$

$$3S_n' = 7S_n - 4(n+1) \text{ إذن}$$

$$18 \times S_n' = 7^{n+2} - 24n - 31 \text{ ب-استنتاج أن: من أجل كل عدد طبيعي } n$$

من الجواب السابق لدينا $3S_n' = 7S_n - 4(n+1)$ بضرب طرفي هذه العلاقة في 6 نجد

$$S_n = \frac{7^{n+1}-1}{6} \text{ لكن لدينا } 18S_n' = 7(6S_n) - 24(n+1)$$

$$18 \times S_n' = 7^{n+2} - 24n - 31 \text{ إذن } 18S_n' = 7(6 \frac{7^{n+1}-1}{6}) - 24(n+1) \text{ ومنه}$$

$$3-أ) \text{ دراسة حسب قيم العدد الطبيعي } n \text{ بواقي قسمة العدد } 7^n \text{ على } 5$$

$$\text{لدينا: } 7^4 \equiv 1[5], 7^3 \equiv 3[5], 7^2 \equiv 4[5], 7^1 \equiv 2[5], 7^0 \equiv 1[5]$$

بواقي قسمة 7^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

| | | | | |
|--------------|------|--------|--------|--------|
| $n =$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
| $7^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 | 3 |

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S_n' قابلا للقسمة على 5.

S_n' قابلا للقسمة على 5 معناه $S_n' \equiv 0[5]$ تكافئ $18S_n' \equiv 0[5]$ (ضرب الطرفين في 18)

$$\text{وتكافئ } 7^{n+2} - 24n - 31 \equiv 0[5] \text{ وتكافئ } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5]$$

لتعيين قيم العدد الطبيعي نميز عدة حالات هي:

$$(1) \ n = 4k \text{ تكون } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } k \equiv 3[5] \text{ وعليه } n = 20k' + 12 \ (k' \in \mathbb{N})$$

$$(2) \ n = 4k + 1 \text{ تكون } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } k \equiv 3[5] \text{ وعليه } n = 20k' + 13 \ (k' \in \mathbb{N})$$

$$(3) \ n = 4k + 2 \text{ تكون } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } k \equiv 2[5] \text{ وعليه } n = 20k' + 10 \ (k' \in \mathbb{N})$$

$$(4) \ n = 4k + 3 \text{ تكون } 7^{n+2} + n - 1 \equiv 0[5] \text{ تكافئ } k \equiv 4[5] \text{ وعليه } n = 20k' + 19 \ (k' \in \mathbb{N})$$

التمرين 71: دورة 2017 الاستراكية

1) التحقق أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما.

لإثبات أن العددين 5 و 63 أوليان فيما بينهما معناه $\text{PGCD}(63;5) = 1$

$$\text{الطريقة: } \text{PGCD}(63;5) = 1$$

$$\text{لدينا: } 63 = 5 \cdot 12 + 3 \text{ و } 5 = 3 \cdot 1 + 2 \text{ و } 3 = 2 \cdot 1 + 1$$

آخر باقي غير معدوم في القسمة المتتابعة لخوارزمية إقليدس هو 1 ومنه $\text{PGCD}(63;5) = 1$

ملاحظة: يمكن استعمال مبرهنة بيزو

تبيان أن المعادلة (E) تقبل حولا.

تذكير: المعادلة $ax + by = c$ تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 معناه $\text{PGCD}(a;b)$ يقسم العدد c

$$\text{لدينا: } 63x + 5y = 159 \dots (E)$$

المعادلة (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 لأن $\text{PGCD}(63;5) = 1$ يقسم 159

(2) البرهان أنه إذا كانت الثانية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 3[5]$.

لدينا: (E) $63x + 5y = 159$ تكافئ: $63x = 159 - 5y$ أي $63x \equiv 159[5]$

ومنه $3x \equiv 9[5]$ لأن $63 \equiv 3[5]$ و $159 \equiv 9[5]$

ومنه أيضاً $3x \equiv 9[5]$ تكافئ $x \equiv 3[5]$ لأن 3 أولي مع 5

استنتاج حلول المعادلة (E)

من الجواب السابق لدينا: $x \equiv 3[5]$ وعليه $x = 5k + 3$ حيث k عدد صحيح.

لدينا: (E) $63x + 5y = 159$ تكافئ $5y = 159 - 63x$

بتعويض قيمة $x = 5k + 3$ في المعادلة $5y = 159 - 63x$ نجد:

$$y = -63k - 6 \quad \text{إذن} \quad -5y = 30 + 63 \times 5k \quad -5y + 159 = 63(5k + 3)$$

الخلاصة: حلول المعادلة (E) هي المجموعة: $\{(x; y) = (5k + 3; -63k - 6); k \in \mathbb{Z}\}$

(3) إيجاد العددين الطبيعيين α و β .

لدينا: λ عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 7

$$\text{ومنه: (1)} \quad \lambda = \overline{5\alpha 0\alpha}^7 = \alpha + 7^2\alpha + 7^3.5 = 50\alpha + 1715$$

ولدينا: λ يكتب $\overline{\beta 10\beta 0}$ في النظام ذي الأساس 5

$$\text{ومنه: (2)} \quad \lambda = \overline{\beta 10\beta 0}^5 = 5\beta + 1.5^3 + 5^4\beta = 630\beta + 125$$

من (1) و (2) نجد: $630\beta + 125 = 50\alpha + 1715$ وتكافئ (3) $63\beta + 5(-\alpha) = 159$

بمطابقة المعادلتين (3) و (E) نجد أن: $(\beta; -\alpha) = (x; y) = (5k + 3; -63k - 6)$

أي $(\beta; \alpha) = (5k + 3; 63k + 6)$ ولدينا أيضاً: $0 \leq \alpha \leq 6$ و $0 \leq \beta \leq 4$

ومعناه $0 \leq 5k + 3 \leq 6$ و $0 \leq 63k + 6 \leq 4$ أي $k = 0$ وعليه: $(\beta; \alpha) = (3; 6)$

كتابة العدد $\lambda + 2$ في النظام العشري.

من العلاقة (1) لدينا: $\lambda = 50\alpha + 1715$ ومنه $\lambda + 2 = 50\alpha + 1717$ حيث $\alpha = 6$

$$\text{وعليه} \quad \lambda + 2 = 50(6) + 1717 = 2017$$

ملاحظة: نحصل على نفس النتيجة باستعمال العلاقة (2)

4-أ) دراسة باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 وذلك حسب قيم العدد الطبيعي n

$$\text{لدينا: } 3^0 \equiv 1[5], 3^1 \equiv 3[5], 3^2 \equiv 4[5], 3^3 \equiv 2[5], 3^4 \equiv 1[5]$$

بواقي قسمة 3^n على 5 تشكل متتالية دورية ودورها 4 وحسب الجدول التالي

| | | | | |
|--------------|------|----------|----------|----------|
| $n =$ | $4k$ | $4k + 1$ | $4k + 2$ | $4k + 3$ |
| $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 4 | 2 |

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017}$ القسمة على 5

العدد $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0[5]$ يقبل القسمة على 5 معناه $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0[5]$ لدينا: $(x; y) = (5k + 3; -63k - 6)$ حيث x عدد طبيعي ومنه $(x - y) = (68k + 9)$ وعليه $3^{x-y} = 3^{68k+9} = 3 \cdot 3^{68k+8} \equiv 3[5]$ لأن $3^{68k+8} \equiv 1[5]$ ولدينا: $1428 \equiv 3[5]$ ومنه $1428^{2017} \equiv 3^{2017}[5]$ أي $1428^{2017} \equiv 3[5]$ لأن $3^{2017} \equiv 3[5]$ وعليه يكون لدينا: $3^{x-y} + 4n + 1438^{2017} \equiv 0[5]$ تكافئ $3 + 4n + 3 \equiv 0[5]$ إذن $4n \equiv 4[5]$ $n \equiv 1[5]$ ومعناه $n = 5p + 1$ حيث $p \in \mathbb{N}$

التمرين 72: دورة الاستراكية

1-أ) تبيان أن: من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

لدينا المتتالية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1} = 4u_n + 1$ لإثبات $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ من أجل كل عدد طبيعي n نستعمل البرهان بالتراجع*
التحقق من صحة $P(0)$

من أجل $n=0$ يكون لدينا: $u_0 = \frac{1}{3}(4^0 - 1) = 0$ محققة لأن $u_0 = 0$

*نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

ونبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

لدينا: $u_{n+1} = 4u_n + 1$ لكن $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ من فرضية التراجع

ومنّه: $u_{n+1} = 4 \left(\frac{1}{3}(4^n - 1) \right) + 1 = \frac{4}{3} \cdot 4^n - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{3} \cdot 4^{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$ أي $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$

ومنّه الخاصية $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) التحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العددين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما
تذكير: مبرهنة بيزو:

العددين a و b أوليان فيما بينهما معناه وجود ثنائية $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}$ تحقق المعادلة $ax_0 + by_0 = 1$

لدينا: $u_{n+1} = 4u_n + 1$ تكافئ $u_{n+1} - 4u_n = 1$

الثنائية $(1; -4)$ تحقق المعادلة: $u_{n+1} - 4u_n = 1$ معناه العددين u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما

2-أ) البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية وتعيين أساسها وحدّها الأول v_0

المتتالية (v_n) هندسية أساسها q معناه من أجل كل عدد طبيعي $n: v_{n+1} = q \cdot v_n$

لدينا: المتتالية (v_n) معرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي $n: v_n = u_n + \frac{1}{3}$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{3}$ ومنه $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4(u_n + \frac{1}{3}) = 4v_n$

ومن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 4$ حدّها الاول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

ب) التعبير بدلالة n عن المجموع S_n

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{3n}$ مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية

ومنّه: $S_n = v_0 \left[\frac{q^{3n+1} - 1}{q - 1} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{(4)^{3n+1} - 1}{4 - 1} \right] = \frac{1}{9} (4^{3n+1} - 1)$

3) تعيين القاسم المشترك الأكبر للعديدين $4^{n+1} - 1$ و $4^n - 1$

لدينا: $u_n = \frac{1}{3} (4^n - 1)$ ومنه لدينا: $3u_n = 4^n - 1$ ومنه أيضا: $3u_{n+1} = 4^{n+1} - 1$

وعليه $\text{PGCD}(3u_{n+1}; 3u_n) = 3\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n)$ خاصية

ومنّه: $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1; 4^n - 1) = 3.1 = 3$ لان $\text{PGCD}(u_{n+1}; u_n) = 1$ حسب 1-ب)

4-أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية 4^n على 7.

لدينا: $4^3 \equiv 1[7]$, $4^2 \equiv 2[7]$, $4^1 \equiv 4[7]$, $4^0 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 4^n على 7 تشكل متتالية دورية

ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| | | | |
|--------------|----|--------|--------|
| n = | 3k | 3k + 1 | 3k + 2 |
| $4^n \equiv$ | 1 | 4 | 2 |

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل A_n

لدينا: $A_n = 9S_n - 6n - 3^{6n+4}$

$A_n \equiv 0[7]$ يقبل القسمة على 7 معناه

$9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7]$ معناه $A_n \equiv 0[7]$

لدينا: $9S_n = (4^{3n+1} - 1)$ ومنه $9S_n \equiv 3[7]$ لأن: $4^{3n+1} \equiv 4[7]$

ولدينا كذلك: $3^{6n+4} \equiv [(-4)^2]^{3n+2} [7] \equiv 4[7]$ أي $3^{6n+4} \equiv 4[7]$

نسنتج أن: $9S_n - 6n - 3^{6n+4} \equiv 0[7]$ تكافئ $3 - 6n - 4 \equiv 0[7]$ أي $6n \equiv 6[7]$

وأخيرا $n \equiv 1[7]$ لان 6 أولي مع 7 إذن: $n = 7p + 1$ حيث $p \in \mathbb{N}$.

التمرين 73: دورة 2016 الموضوع 1

1) حساب u_1 و u_2 واستنتاج الأساس q

لدينا: (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها حيث: $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$

*الجملة $\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} \ln(u_1) \cdot (u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} (u_1) \cdot (u_2) = e^{11} \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$

الحدان u_1 و u_2 هما حلا المعادلة: $x^2 - Sx + P = 0$ حيث: $S = e^4(1 + e^3)$ و $P = e^{11}$
 حلول المعادلة $x^2 - Sx + P = 0$ هما: $x = u_1 = e^4$ أو $x' = u_2 = e^7$.

*لدينا: $u_2 = q.u_1$ ومنه: $q = \frac{u_2}{u_1} = e^3$

2- أ) التعبير عن u_n بدلالة n

لدينا $u_n = u_1.q^{n-1} = e^4(e^3)^{n-1} = e^{3n+1}$ ومنه:

ب) حساب المجموع S_n بدلالة n

لدينا: $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$

ومنه: $S_n = \ln(u_0).(u_1).....(u_n) = \ln\left[(u_0)^{n+1}.q^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = (n+1)\ln((u_0).q^{\frac{n}{2}})$

تطبيق عددي: لدينا: $u_0 = e$ و $q = e^3$ ومنه: $S_n = (n+1)\ln((e).e^{\frac{3n}{2}}) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$

3- أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

لدينا: $a_n = n+3$ و $2S_n = (n+1)(3n+2) = 3n^2 + 5n + 2$

يمكن كتابة $2S_n = (n+3)(3n-4) + 14 = a_n(3n-4) + 14$ ومنه: $2S_n - a_n(3n-4) = 14$

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

ب) تعيين القيم الممكنة لـ $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$

من الجواب السابق لدينا: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = \text{PGCD}(a_n; 14)$

ومنه $\text{PGCD}(2S_n; a_n)$ هي قواسم العدد 14 وهي: 1، 2، 7 و 14

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي بحيث: $\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$

$\text{PGCD}(2S_n; a_n) = 7$ معناه $\text{PGCD}(a_n; 14) = 7$ ومعناه $\text{PGCD}(n+3; 14) = 7$ مع $n+3 = 7k$

وعليه يكون $\text{PGCD}(n+3; 14) = 7$ تكافئ $\text{PGCD}(7k; 14) = 7$ أي $\text{PGCD}(k; 2) = 1$

$\text{PGCD}(k; 2) = 1$ تعني أن k أولي مع 2 أي أن k يكون عدد فردي أي $k = 2k' + 1$

ولدينا: $n+3 = 7k$ أي $n = 7k - 3$ وبعد تعويض $k = 2k' + 1$ نجد: $n = 14k' + 4$ حيث $k' \in \mathbb{N}$

4) دراسة بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

$2^3 \equiv 1[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^0 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية

دورية ودورها 3 وحسب الجدول المقابل

| | | | |
|--------------|------|--------|--------|
| $n =$ | $3k$ | $3k+1$ | $3k+2$ |
| $2^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 |

5) تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون:
 $\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$

لدينا: $b_n = 3n.a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1 = 3n^2 + 9 - (3n^2 + 5n + 2) + 1437^{2016} + 1$

ولدينا: $1437^{2016} \equiv 2^{2016} [7] \equiv 1 [7]$ لأن: $1437 \equiv 2 [7]$ و $2016 \equiv 1 [3]$
وعليه: $b_n \equiv -5n + 9 [7]$ أي $5n - 9 \equiv 0 [7]$ وتكافئ $15n \equiv 6 [7]$ أي $n \equiv 6 [7]$
ومنه: $\begin{cases} b_n \equiv 0 [7] \\ n \equiv 0 [5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n \equiv 0 [7] \\ n \equiv 0 [5] \end{cases}$ وتكافئ $\begin{cases} 5n \equiv 0 [35] \\ 7n \equiv 0 [35] \end{cases}$ بالطرح نجد $2n \equiv 0 [35]$
أي $n \equiv 0 [35]$ وأخيرا $n = 35k$ حيث k عدد طبيعي.
(6) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ يقبل القسمة على 7
العدد: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0 [7]$ معناه $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0 [7]$
لدينا: $1437^{9n+1} \equiv (2^3)^3 \cdot 2 \equiv 2 [7]$ و $4^{12n+1} \equiv (4^{3n})^4 \times 4 \equiv 4 [7]$ و $52 \equiv 3 [7]$
وعليه: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 - 3 \cdot 4 + 3 [7] \equiv -7 [7]$ ومنه: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0 [7]$
أي: $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0 [7]$

التمرين 74: دورة 2016 الموضوع 2

1-أ) دراسة بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

$$3^5 \equiv 1 [11], 3^4 \equiv 4 [11], 3^3 \equiv 5 [11], 3^2 \equiv 9 [11], 3^1 \equiv 3 [11], 3^0 \equiv 1 [11]^*$$

بواقي قسمة 3^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وهي حسب الجدول التالي

| n | 5k | 5k + 1 | 5k + 2 | 5k + 3 | 5k + 4 |
|--------------|----|--------|--------|--------|--------|
| $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 |

$$7^6 \equiv 4 [11], 7^5 \equiv 10 [11], 7^4 \equiv 3 [11], 7^3 \equiv 2 [11], 7^2 \equiv 5 [11], 7^1 \equiv 7 [11], 7^0 \equiv 1 [11]^*$$

$$7^{10} \equiv 1 [11] \text{ و } 7^9 \equiv 8 [11], 7^8 \equiv 9 [11], 7^7 \equiv 6 [11]$$

بواقي قسمة 7^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 10 وهي حسب الجدول التالي

| n | 10k' | 10k' + 1 | 10k' + 2 | 10k' + 3 | 10k' + 4 |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $7^n \equiv$ | 1 | 7 | 5 | 2 | 3 |
| n | 10k' + 5 | 10k' + 6 | 10k' + 7 | 10k' + 8 | 10k' + 9 |
| $7^n \equiv$ | 10 | 4 | 6 | 9 | 8 |

ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف لـ 11

$$2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4} [11] \equiv 4 [11] \text{ و } 1437^{10n+4} \equiv 3 [11] \text{ ومنه } 1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4} [11]$$

$$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0 [11] \text{ أي } 2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 2 \cdot 4 + 3 [11]$$

2-أ) حل المعادلة $7x - 3y = 8$.

$$7x - 3y = 8 \text{ تكافئ } 7x = 3y + 8 \text{ ومنه } 7x \equiv 8 [3] \text{ أي } x \equiv 2 [3] \text{ إذن } x = 3k + 2 \text{ مع } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{بتعويض قيمة } x = 3k + 2 \text{ في المعادلة } 7x = 3y + 8 \text{ نجد: } y = 7k + 2 \text{ مع } k \in \mathbb{N}$$

$$\text{ومنه حلول المعادلة } 7x - 3y = 8 \text{ هي الثنائيات } (x; y) = (3k + 2; 7k + 2) \text{ مع } k \in \mathbb{N}$$

ب) تعيين القيم الممكنة للعدد d.

لدينا: d هو القاسم المشترك الأكبر لـ x و y حيث $(x; y)$ حلول المعادلة $7x - 3y = 8$
لدينا: d/x ومنه $d/7x$ ومنه $d/3y$ ومنه $d/8$ أي: $d \in D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$ (2).....

من (1) و (2) نستنتج أن: $d/7x - 3y$ ومنه $d/8$ أي: $d \in D_8 = \{1; 2; 4; 8\}$
تعيين الحلول من أجل $d=4$.

لدينا: $PGCD(3k + 2; 7k + 2) = 4$ تكافئ $PGCD(k - 2; 8) = 4$

ولدينا: $k - 2 = 4\alpha$ ومنه $PGCD(4\alpha; 8) = 4$

أي $PGCD(\alpha; 2) = 1$ أي $\alpha = 2m + 1$ لأن α أولي مع 2 حيث m عدد طبيعي
ومنه $k = 8m + 6$ وبعد تعويض قيمة k في الحلول نجد: $(x; y) = (24m + 20; 56m + 44)$

ج) تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$

لدينا: $1437^{3y} \equiv 7^{3y} [11]$ و $2016^{7x} \equiv 3^{7x} [11]$

وعليه: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$ تكافئ $3^{7x} + 7^{3y} \equiv 0[11]$ حيث $(x; y) = (3k + 2; 7k + 2)$

بعد التبسيط نجد: $3^{7x} + 7^{3y} \equiv 0[11]$ تكافئ $3^k + 7^k \equiv 0[11]$ وبعد عملية توحيد الدورين 5 و 10 ولإيجاد الثنائيات المطلوبة نستعمل الجدول التالي:

| k | 10p | 10p + 1 | 10p + 2 | 10p + 3 | 10p + 4 |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $3^k \equiv$ | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 |
| $7^k \equiv$ | 1 | 7 | 5 | 2 | 3 |
| $3^k + 7^k \equiv$ | 2 | 10 | 3 | 7 | 7 |
| k | 10p + 5 | 10p + 6 | 10p + 7 | 10p + 8 | 10p + 9 |
| $3^k \equiv$ | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 |
| $7^k \equiv$ | 10 | 4 | 6 | 9 | 8 |
| $3^k + 7^k \equiv$ | 0 | 7 | 4 | 4 | 1 |

توجد حالة وحيدة تحقق هي من أجل $n = 10p + 5$ ومن الحلول هي
 $(x; y) = (30p + 17; 70p + 37)$ حيث p عدد طبيعي

التمرين 75: دورة 2015 الموضوع 1

(1) - أ) تعيين باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

لدينا: $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$.

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول المقابل

| n = | 3k | 3k + 1 | 3k + 2 |
|--------------|----|--------|--------|
| $2^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 |

ب) استنتاج باقي القسمة الأقليدية للعدد $2015^{53} - 1954^{1962} + 1962^{1954}$ على 7.

لدينا: $1962 \equiv 2[7]$ و $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$
 لكن $1954 \equiv 1[3]$ ومنه $2^{1954} \equiv 2[13]$ أي $1962^{1954} \equiv 2[7]$
 لدينا: $1954 \equiv 1[7]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[7]$
 ولدينا: $2015 \equiv 6[7]$ أي $2015 \equiv -1[7]$
 ومنه $2015^{53} \equiv (-1)^{53}[7]$ أي $2015^{53} \equiv (-1)[7]$ لأن 53 عدد فردي
 وعليه: $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2 - 1 - 1[7]$
 ومنه: $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 0[7]$
 إذن باقي القسمة الأقليدية للعدد $1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}$ على 7 هو 0.

(2) - أ) تبين أن العدد 89 أولي.

$\sqrt{89} = 9,4$ نبين أن العدد لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأولية الأصغر من 9

| العدد | القاسم الأولي | الحاصل | الباقى |
|-------|---------------|--------|--------|
| 89 | 2 | 44 | 1 |
| 89 | 3 | 29 | 2 |
| 89 | 5 | 17 | 4 |
| 89 | 7 | 12 | 5 |

من الجول السابق أن العدد 89 أولي.

ب) تعيين كل قواسم العدد الطبيعي 7832.

لدينا: تحليل العدد 7832 هو $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$
 ومنه عدد قواسم العدد 7832 يساوي $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$
 لإيجاد قواسم العدد 7832 نستعمل الجدولين التاليين:

| | | | | | | | | |
|----------|--------|--------|--|----------|---|----|-----|------|
| \times | 11^0 | 11^1 | | \times | 1 | 11 | 89 | 979 |
| 89^0 | 1 | 11 | | 2^0 | 1 | 11 | 89 | 979 |
| 89^1 | 89 | 979 | | 2^1 | 2 | 22 | 178 | 1958 |
| | | | | 2^2 | 4 | 44 | 356 | 3916 |
| | | | | 2^3 | 8 | 88 | 712 | 7832 |

نستنتج قواسم العدد 7832 هي:

$$D_{7832} = \{1; 2; 4; 8; 11; 22; 44; 88; 89; 178; 376; 712; 979; 1958; 3916; 7832\}$$

ج) تبين أن العددين 977 و 981 أوليان فيما بينهما.

العددين 977 و 981 أوليان فيما بينهما معناه $\text{PGCD}(977; 981) = 1$

لدينا: $981 = 977 \times 1 + 4$
 $977 = 4 \times 244 + 1$
 آخر باقي غير معدوم هو 1

ومنه العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

(3) تعيين العددين الطبيعيين x و y .

لدينا: $PGCD(x; y) = 2$ معناه $x = 2x'$ و $y = 2y'$ و $PGCD(x'; y') = 1$

$$\begin{cases} (x'-y')(x'+y') = 7832 \\ x'-y' \equiv 4[11] \\ PGCD(x'; y') = 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x'-y' \equiv 4[11] \\ PGCD(x'; y') = 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \\ PGCD(x; y) = 2 \end{cases}$$

نستنتج أن الفرق $x' - y' = 11k + 4$ وهو قاسم للعدد 7832

الحالة الوحيدة التي تحقق هي :

$$\begin{cases} x = 2x' = 1962 \\ y = 2y' = 1954 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} x' = 981 \\ y' = 977 \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} x' - y' = 11k + 4 = 4 \\ x' + y' = 1958 \end{cases}$$

(4-أ) البرهان أن a أولي مع $b \times c$

لدينا: a أولي مع كلا من b و c معناه وجود الثنائيات $(x_0; y_0)$ و $(x'_0; y'_0)$

من الاعداد الصحيحة يحققان $ax_0 + by_0 = 1 \dots (1)$ و $ax'_0 + cy'_0 = 1 \dots (2)$

ونبرهن أن a أولي مع $b \times c$ معناه وجود الثنائية $(u; v)$ حيث $au + (bc)v = 1$

بضرب (1) و (2) طرف لطرف نجد: $(ax_0 + by_0)(ax'_0 + cy'_0) = 1$

ومنه: $1 = a^2x_0x'_0 + acx_0y'_0 + abx'_0y_0 + bcy_0y'_0$ أي: $a(x_0x'_0 + cx_0y'_0 + bx'_0y_0) + bc(y_0y'_0) = 1$

ومنه: $u = x_0x'_0 + cx_0y'_0 + bx'_0y_0$ و $v = y_0y'_0$

(ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $PGCD(a; b^n) = 1$

من أجل $n = 1$ فإن: $PGCD(a; b) = 1$ محققة من الفرضية.

نفرض أن: $PGCD(a; b^n) = 1$ ونبرهن أن $PGCD(a; b^{n+1}) = 1$

لدينا: $PGCD(a; b^n) = 1$ فرضية التراجع و $PGCD(a; b) = 1$

ومنه $PGCD(a; b^{n+1}) = 1$ حسب الجواب 4-أ).

(ج) استنتاج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962}

لدينا: $PGCD(981^{1954}; 977) = 1$ و $PGCD(981^{1954}; 977^{1962}) = 1$ و $PGCD(981^{1954}; 2^8) = 1$

من 4-أ ينتج $PGCD(981^{1954}; 977^{1962} \cdot 2^8) = 2^{1954}$. $PGCD(1962^{1954}; 1954^{1962}) = 2^{1954}$

التمرين 76: دورة 2014 الموضوع 1

1-أ) حساب $PGCD(2013; 1962)$.

لدينا: $2013 = 3 \times 671$ و $1962 = 3 \times 654$ ومنه $PGCD(2013; 1962) = 3PGCD(671; 654)$

لدينا $PGCD(671; 654) = 1$ يمكن استعمال خوارزمية إقليدس أو مبرهنة بيزو

ومنه: $PGCD(2013; 1962) = 3$

(ب) استنتاج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً.

لدينا: (E) : $2013x - 1962y = 54$

ولدينا: 3 يقسم 2013 ومنه 3 يقسم $2013x$ و 3 يقسم 1962 ومنه 3 يقسم $1962y$ ومنه: 3 يقسم الفرق $2013x - 1962y$ ومنه 3 يقسم 54 ومنه المعادلة (E) تقبل حلول.
(ج) تبين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 0[6]$.

لدينا: (E) : $2013x - 1962y = 54$ تكافئ $671x - 654y = 18$ وذلك بقسمة طرفي (E) على 3
 $671x - 654y = 18$ تكافئ $671x = 654y + 18$ وتكافئ $671x = 6(109y + 3)$
ومنه: $671x \equiv 0[6]$ أي $x \equiv 0[6]$ لأن 671 أولي مع 6.

(د) استنتاج حلا خاصا $(x_0; y_0)$ حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E).

* من الجواب السابق لدينا: $x_0 \equiv 0[6]$ و $74 < x_0 < 80$ ومنه $x_0 = 78$
* من أجل $x_0 = 78$ نجد $y_0 = 80$ وذلك بعد تعويض قيمة $x_0 = 78$ في المعادلة $671x - 654y = 18$
ومنه الثنائية $(78; 80)$ حل خاص للمعادلة $671x - 654y = 18$

وعليه نحصل على الجملة التالية $\begin{cases} 671x - 654y = 18 \dots (1) \\ 671(78) - 654(80) = 18 \dots (2) \end{cases}$ بطرح (2) من (1) طرف لطرف

نجد: $671(x - 78) - 654(y - 80) = 0$ ومنه: $671(x - 78) = 654(y - 80) \dots (*)$

من (*) نستنتج أن: 671 يقسم $654(y - 80)$ ومنه 671 يقسم $(y - 80)$ لأن 671 أولي مع 654 (م غوص)
ومنه: $(y - 80) = 671k$ أي $y = 671k + 80$ وبعد تعويض قيمة y في (*) نجد: $x = 654k + 78$
ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (654k + 78; 654k + 80)$ مع أن k عدد صحيح.

2- أ) تعيين القيم الممكنة للعدد d.

d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x; y)$ حلا للمعادلة (E).

لدينا: d يقسم x ومنه d يقسم $671x$ و d يقسم ومنه d يقسم $654y$

ومنه: d يقسم الفرق $671x - 654y$ أي d يقسم الطرف الثاني 18 إذن: $d \in D_{18} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 18\}$

ب) تعيين قيم العددين a و b.

لدينا: الثنائية $(a; b)$ تحقق: الشرطين: $671a - 654b = 18$ و $\text{PGCD}(a; b) = 18$.

ومنه: $\begin{cases} a \equiv 0[18] \\ b \equiv 0[18] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 654k + 78 \equiv 0[18] \\ 671k + 80 \equiv 0[18] \end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد: $17k + 2 \equiv 0[18]$

ولدينا: $-k \equiv -2[18]$ أي $k \equiv 2[18]$ إذن: $k = 18p + 2$ حيث $p \in \mathbb{N}$

بتعويض قيمة $k = 18p + 2$ في حلول المعادلة نجد: $(a; b) = (11772p + 1386; 12078p + 1422)$

التمرين 77: دورة 2013 الموضوع 1

1- أ- تبين أن: $\text{PGCD}(\alpha; \beta) = \text{PGCD}(\beta; 10)$

$PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$ حيث: $a = b.q + r$ علما أن q و r هما حاصل وباقي قسمة a على b

لدينا: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

باستعمال القسمة الأقليدية للعدد α على β نجد: $\alpha = (2n^2 - 6n + 4)\beta + (-10)$

ومنه: $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; |-10|)$ أي $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$

ب- تعيين القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$.

نضع: $PGCD(\alpha; \beta) = d$ ومنه $PGCD(\beta; 10) = d$ ومنه d يقسم 10 إذن: $d \in \{1; 2; 5; 10\}$

ج- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $PGCD(\alpha; \beta) = 5$

$PGCD(\alpha; \beta) = 5$ تكافئ $PGCD(\beta; 10) = 5$ وتكافئ $\beta \equiv 0[5]$ ومنه $n + 3 = 5k$

ومنه: $PGCD(5k; 5.2) = 5$ أي $PGCD(k; 2) = 1$ وعليه $PGCD(k; 2) = 1$

إذن: k عدد فردي أي $k = 2p + 1$ ومنه: $n = 5(2p + 1) - 3$ وأخيرا $n = 10p + 2$ مع $p \in \mathbb{N}$

لدينا: $\beta \equiv 0[5]$ تكافئ $n + 3 \equiv 0[5]$ أي $n = 5k - 3$ حيث k عدد طبيعي غير معدوم

2. أ- دراسة، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

لدينا: $4^0 \equiv 1[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$ ، $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^4 \equiv 3[11]$ ، $4^5 \equiv 1[11]$

بواقي قسمة 4^n على 11 تشكل متتالية دورية ودورها 5 وحسب الجدول التالي

| $n =$ | $5k$ | $5k + 1$ | $5k + 2$ | $5k + 3$ | $5k + 4$ | |
|--------------|------|----------|----------|----------|----------|------|
| $4^n \equiv$ | 1 | 4 | 5 | 9 | 3 | [11] |

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

لدينا: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} (4^{5p+1})^5 + (4^{5p+1})^2 + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 10p + 2 \end{cases}$

من الجدول لدينا: $4^{5p+1} \equiv 4[11]$ ومنه: $(4^{5p+1})^2 \equiv 5[11]$ و $(4^{5p+1})^5 \equiv 1[11]$

وعليه الجملة $\begin{cases} (4^{5p+1})^5 + (4^{5p+1})^2 + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 10p + 2 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} n \equiv 5[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} n \equiv -6[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 10n \equiv -60[110] \\ 11n \equiv 22[110] \end{cases}$ بالطرح نجد: $n \equiv 82[110]$

إذن: $n \equiv 110\alpha + 82$ حيث α عدد طبيعي.

التمرين 78: دورة 2013 الموضوع 3

1. أ- تعيين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n + 27 \equiv 0[n+1]$

لدينا: $2n+27 \equiv 0[n+1]$ تكافئ $2n+2+25 \equiv 0[n+1]$ وتكافئ $25 \equiv 0[n+1]$

$n+1 \in D_{25} = \{1; 5; 25\}$ ومنه: $25 \equiv 0[n+1]$ تعني أن $n+1$ يقسم 25

$n \in \{0; 4; 24\}$ تكافئ $n+1 \in \{1; 5; 25\}$

ب- تعيين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية ، حيث : $(b - a)(a + b) = 24$

لتعيين الثنائيات $(a; b)$ نبحث أولاً على قواسم العدد 24

لدينا: $24 = 2^3 \times 3$ ومنه عدد القواسم هو : $(3 + 1)(1 + 1) = 8$

ومنه : $D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

الحالات التي تحقق المعادلة $(b - a)(a + b) = 24$ حيث $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية هي :

الحالة 1: $(b - a)(a + b) = 2 \times 12$ ومعناه $\begin{cases} (a + b) = 12 \\ (b - a) = 2 \end{cases}$ ومعناه $(a; b) = (5; 7)$

الحالة 2: $(b - a)(a + b) = 4 \times 6$ ومعناه $\begin{cases} (a + b) = 6 \\ (b - a) = 4 \end{cases}$ ومعناه $(a; b) = (1; 5)$

ج- أستنتاج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

لدينا: $(b - a)(a + b) = 24$ تكافئ $b^2 - a^2 = 24$ وتكافئ $b^2 = a^2 + (\sqrt{24})^2$

الحالة 1: $(a; b) = (5; 7)$ معناه $7^2 = 5^2 + (\sqrt{24})^2$

حسب فيثاغورس $\sqrt{24}$ هو طول الضلع AB في مثلث ABC قائم A حيث: $AC = 5$ و $BC = 7$

الحالة 2: $(a; b) = (1; 5)$ معناه $5^2 = 1^2 + (\sqrt{24})^2$

حسب فيثاغورس $\sqrt{24}$ هو طول الضلع AB في مثلث ABC قائم A حيث: $AC = 1$ و $BC = 5$

2-أ- كتابة العددين α و β في النظام العشري.

لدينا: $\alpha = 10141$ ومنه $\alpha = 1.5^4 + 0.5^3 + 1.5^2 + 4.5^1 + 1.5^0 = 671$

لدينا: $\beta = 3403$ ومنه $\beta = 3.5^3 + 4.5^2 + 0.5^1 + 3.5^0 = 478$

ب- تعيين الثنائية $(a; b)$ من \mathbb{N}^2 حيث: $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$

الجملة $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ 671a - 478b = 9 \end{cases}$

الحالة 1: الثنائية $(a; b) = (5; 7)$ تحقق الجملة $\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ 671a - 478b = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ 671a - 478b = 9 \end{cases} \text{ الحالة 2: الثانية } (a; b) = (1; 5) \text{ لا تحقق الجملة}$$

$$\text{ومنه حلول الجملة } \begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases} \text{ هي الثانية } (a; b) = (5; 7)$$

3.أ- إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 .

$$\text{لدينا: } 2013 = 3.671 \text{ و } 1434 = 3.478$$

ومنه : القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 هو 3

استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478

$$\text{لدينا: } \text{PGCD}(2013; 1434) = 3. \text{PGCD}(671; 478)$$

671 عدد أولي لأن $\sqrt{671} = 25,9$ و 671 لا يقبل القسمة على كل الاعداد الأولية الأصغر من 23

$$\text{ومنه: } \text{PGCD}(671; 478) = 1$$

ب- حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $2013x - 1434y = 27$

$$\text{المعادلة } 2013x - 1434y = 27 \text{ تكافئ } 671x - 478y = 9$$

من الجواب 2- ب) نستنتج أن الثانية $(5; 7)$ حل خاص للمعادلة $671x - 478y = 9$

$$\begin{cases} 671x - 478y = 9 \dots (1) \\ 671(5) - 478(7) = 9 \dots (2) \end{cases} \text{ ومنه نحصل على الجملة التالية}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} 671x - 478y = 9 \dots (1) \\ 671(5) - 478(7) = 9 \dots (2) \end{cases} \text{ بطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: } 671(x - 5) - 478(y - 7) = 0$$

$$\text{ومنه: } 671(x - 5) = 478(y - 7) \dots (*)$$

من (*) نستنتج أن: 478 يقسم $671(x - 5)$ ومنه 478 يقسم $(x - 5)$ لأن 671 أولي مع 478 (م. غوص)

$$\text{ومنه: } (x - 5) = 478k \text{ أي } x = 478k + 5 \text{ وبعد تعويض قيمة } x \text{ في } (*) \text{ نجد: } y = 671k + 7$$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (478k + 5; 671k + 7)$ مع أن k عدد صحيح.

التمرين 79: دورة 2012 الموضوع 1

1- أ- تبين أن العدد 2011 أولي .

$$2011 \text{ عدد أولي لأن: } \sqrt{2011} = 44,84 \text{ ولا يقبل القسمة على كل الاعداد الأولية الأصغر من 44}$$

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس ، تعيين حاد خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حل لمعادلة (1).

$$31 = 579 - 274 \times 2$$

$$31 = 579 - 274 \times (1432 - 2 \times 579)$$

$$31 = 579 - 2 \times (1432 - 2 \times 579)$$

$$31 = 1432(-2) + 5 \times 579$$

$$31 = 1432(-2) + 5 \times (2011 - 1432)$$

$$31 = 2011(5) - 1432(7)$$

$$2011 = 1432 \times 1 + 579$$

$$* \text{ لدينا: } 1432 = 579 \times 2 + 274 \text{ ومنه}$$

$$579 = 274 \times 2 + 31$$

من السطر الأخير نستنتج أن الثنائية (5; 7) حلا خاصا للمعادلة (1).

$$\begin{cases} 2011x - 1432y = 31 \dots (1) \\ 2011(5) - 1432(7) = 31 \dots (2) \end{cases}$$

* ومنه نحصل على الجملة التالية

$$* \text{ لدينا: } \begin{cases} 2011x - 1432y = 31 \dots (1) \\ 2011(5) - 1432(7) = 31 \dots (2) \end{cases} \text{ بطرح (2) من (1) نجد: } 2011(x - 5) - 1432(y - 7) = 0$$

$$\text{ومنه: } (*) \quad 2011(x - 5) = 1432(y - 7) \dots (*)$$

(*) تعني: 1432 يقسم $2011(x - 5)$ ومنه 1432 يقسم $(x - 5)$ لأن 1432 أولي مع 2011 (م. غوص)

ومنه: $(x - 5) = 1432k$ أي $x = 1432k + 5$ وبعد تعويض قيمة x في (*) نجد: $y = 2011k + 7$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (1432k + 5; 2011k + 7)$ مع أن k عدد صحيح.

2- أ- تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 7 .

$$\text{لدينا: } 2^0 \equiv 1[7], 2^1 \equiv 2[7], 2^2 \equiv 4[7], 2^3 \equiv 1[7] .$$

بواقي قسمة 2^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| | | | |
|--------------|------|----------|----------|
| $n =$ | $3k$ | $3k + 1$ | $3k + 2$ |
| $2^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 |

إيجاد باقي القسمة الاقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

$$\text{لدينا: } 2011 \equiv 2[7] \text{ ومنه } 2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{1432^{2012}}[7]$$

$$\text{ولدينا أيضا: } 1432 \equiv 1[3] \text{ ومنه: } 1432^{2012} \equiv 1[3] \text{ أي } 1432^{2012} \text{ من الشكل } 3k + 1$$

$$\text{وعليه: } 2011^{1432^{2012}} \equiv 2^{3k+1}[7] \text{ إذن: } 2011^{1432^{2012}} \equiv 2[7]$$

ومنه باقي قسمة العدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 هو 2 .

ب- تعيين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$

$$\text{لدينا: } 2011 \equiv 2[7] \text{ ومنه: } 2011^n \equiv 2^n[7] \text{ و } 2010 \equiv 1[7] \text{ ومنه } 2010^n \equiv 1[7]$$

$$\text{ولدينا: } 1432 \equiv 4[7] \text{ ومنه } 1432^n \equiv (2^n)^2[7]$$

$$\text{وعليه: } 2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7] \text{ تكافئ } 1 + 2^n + 2^{2n} \equiv 0[7]$$

لتعيين قيم العدد الطبيعي n نشكل الجدول التالي

| $n =$ | $3k$ | $3k + 1$ | $3k + 2$ |
|---------------------------|------|----------|----------|
| $2^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 |
| $2^{2n} \equiv$ | 1 | 4 | 2 |
| $2^{2n} + 2^n + 1 \equiv$ | 3 | 0 | 0 |

من الجدول السابق نستنتج أن قيم العدد الطبيعي n هي: $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$
تعيّن α ، β و γ ثم كتابة N في النظام العشري.

لدينا: N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9

ولدينا: $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1) معناه $2011\beta - 1432\gamma = 31$

ومنه: $\beta = x = 1432k + 5$ و $\gamma = y = 2011k + 7$ حيث $0 \leq \beta \leq 8$ و $0 \leq \gamma \leq 8$

ومنه: $0 \leq 1432k + 5 \leq 8$ و $0 \leq 2011k + 7 \leq 8$ أي $k = 0$ (بعد عملية الحصر)

إذن: $\beta = 5$ و $\gamma = 7$

ومن جهة أخرى لدينا: α ، β و γ هذا الترتيب تشكل حدودا لمتتالية حسابية متزايدة تماما

أي: $\alpha = 2\beta - \gamma = 3$ ومنه $\gamma + \beta + \alpha = 3\beta$

لدينا: $N = \overline{2\gamma\alpha\beta} = \overline{2735} = 2.9^3 + 7.9^2 + 3.9 + 5.9^0 = 2057$

التمرين 80: دورة 2011 الموضوع 1

(1) حل المعادلة (E).

لدينا: (E) $13x - 7y = -1$ حيث x و y عددان صحيحان

يمكن استعمال عدة طرق لحل المعادلة (E) ومن بينها طريقة الموافقة

(E) تكافئ $13x = 7y - 1$ وتكافئ $13x \equiv -1[7]$ وتكافئ $-x \equiv -1[7]$ لأن $13 \equiv -1[7]$

أي $x \equiv 1[7]$ إذن: $x = 7k + 1$ حيث k عدد صحيح

بتعويض قيمة x في المعادلة $13x = 7y - 1$ نجد: $y = 13k + 2$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y) = (7k + 1; 13k + 2)$ مع أن k عدد صحيح.

(2) تعيّن الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث:

$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$$

الجملة $\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$ تكافئ تكافئ $\begin{cases} 13a \equiv -13[91] \\ 7a \equiv 0[91] \end{cases}$ بالطرح نجد: $6a \equiv -13[91]$ أي $a \equiv 13[91]$ إذن: $a \equiv 91p + 13$ حيث p عدد طبيعي.

ملاحظة: يمكن الاعتماد على حلول المعادلة (E) وإيجاد نفس الحل

(3) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 7 و 13

دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 7

لدينا: $9^0 \equiv 1[7]$ ، $9^1 \equiv 2[7]$ ، $9^2 \equiv 4[7]$ ، $9^3 \equiv 1[7]$.

بواقي قسمة 9^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| | | | | |
|--------------|------|--------|--------|-----|
| $n =$ | $3k$ | $3k+1$ | $3k+2$ | |
| $9^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 | [7] |

دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 9^n على 13

لدينا: $9^0 \equiv 1[13]$ ، $9^1 \equiv 9[13]$ ، $9^2 \equiv 3[13]$ ، $9^3 \equiv 1[13]$.

بواقي قسمة 9^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| | | | | |
|--------------|-------|---------|---------|------|
| $n =$ | $3k'$ | $3k'+1$ | $3k'+2$ | |
| $9^n \equiv$ | 1 | 9 | 3 | [13] |

(4) تعيين α و β حتى يكون b قابلا القسمة على 91.

لدينا: $b = \alpha 00\beta 086 = \alpha \cdot 9^6 + \beta \cdot 9^3 + 8 \cdot 9 + 6$

b قابلا القسمة على 91 يكافئ $\begin{cases} b \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[13] \end{cases}$ خاصية ($91 = 7 \cdot 13$) و 7 و 13 أوليان فيما بينهما

$\begin{cases} \alpha + \beta + 1 \equiv 0[7] \\ \alpha + \beta \equiv 0[13] \end{cases}$ لأن $9^6 \equiv 0[7]$ و $9^3 \equiv 0[7]$ وكذلك $9^6 \equiv 0[13]$ و $9^3 \equiv 0[13]$ و $78 \equiv 1[7]$

وحسب ما ورد في الجواب (2) فإن: $\alpha + \beta \equiv 91p + 13$

وبأن: $0 < \alpha \leq 8$ و $0 < \beta \leq 8$ فإن: $0 \leq 91p + 13 \leq 16$ وعليه تكون $p = 0$

ومنه الثنائيات المرتبة التي تحقق b قابلا القسمة على 91 هي:

$(\alpha; \beta) = (5; 8)$ أو $(\alpha; \beta) = (8; 5)$ أو $(\alpha; \beta) = (6; 7)$ أو $(\alpha; \beta) = (7; 6)$

التمرين 81: دورة 2010 الموضوع 1

1- البرهان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13

لدينا: $3^3 \equiv 1[13]$ ومنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$

ومنه: من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13

2- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ يقبل القسمة على 13

لدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه: $3^{3n+1} \equiv 3[13]$ أي $3^{3n+1} - 3 \equiv 0[13]$
لدينا: من أجل $n \in \mathbb{N}$ ، العدد $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه: $3^{3n+2} \equiv 9[13]$ أي $3^{3n+2} - 9 \equiv 0[13]$

3- تعيين حسب قيم n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13.

لدينا: $3^0 \equiv 1[13]$ ، $3^1 \equiv 3[13]$ ، $3^2 \equiv 9[13]$ ، $3^3 \equiv 1[13]$.

بواقي قسمة 3^n على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 3 وحسب الجدول التالي

| $n =$ | $3k'$ | $3k'+1$ | $3k'+2$ | |
|--------------|-------|---------|---------|------|
| $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 9 | [13] |

استنتاج باقي قسمة 2005^{2010} على 13

لدينا: $2005 \equiv 3[13]$ و $2010 \equiv 0[3]$ ومنه $2005^{2010} \equiv 3^{3.670}[13]$ ومنه $2005^{2010} \equiv 1[13]$ وعليه باقي القسمة الإقليدية للعدد 2005^{2010} على 13 هو 1.

4- أ- تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n$.

لدينا: $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$ ومنه: $A_{3n} = 3^{3n} + 3^{2(3n)} + 3^{3(3n)}$

لدينا: $3^{3n} \equiv 1[13]$ ومنه $3^{2(3n)} \equiv 1[13]$ وكذلك $3^{3(3n)} \equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n} \equiv 3[13]$

ب- البرهان أنه من أجل $p=3n+1$ ، فإن A_p يقبل القسمة على 13

لدينا: $A_{3n+1} = 3^{3n+1} + 3^{2(3n+1)} + 3^{3(3n+1)}$

ولدينا $3^{3n+1} \equiv 3[13]$ ومنه $3^{2(3n+1)} \equiv 9[13]$ وكذلك $3^{3(3n+1)} \equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n+1} \equiv 0[13]$

ج- تعيين باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p=3n+2$

لدينا: $A_{3n+2} = 3^{3n+2} + 3^{2(3n+2)} + 3^{3(3n+2)}$

ولدينا: $3^{3n+2} \equiv 9[13]$ ومنه $3^{2(3n+2)} \equiv 3[13]$ وكذلك $3^{3(3n+2)} \equiv 1[13]$ وعليه: $A_{3n+2} \equiv 0[13]$

ومنه باقي القسمة الإقليدية لـ A_p على 13 من أجل $p=3n+2$ هو 0

أ- التحقق أن a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري

لدينا: $a = A_3 = \overline{1001001000} = 1.3^9 + 1.3^6 + 1.3^3$ ومنه $a = A_3$

لدينا: $b = A_4 = \overline{1000100010000} = 1.3^{12} + 1.3^8 + 1.3^4$ ومنه $b = A_4$

ب- استنتاج باقي القسمة الإقليدية لكل من a و b على 13.

لدينا: $a = A_3$ ولدينا $A_3 \equiv 3[13]$ ومنه $a \equiv 3[13]$ أي أن باقي قسمة a على 13 هو 3

لدينا: $b = A_4$ ولدينا $A_4 \equiv 0[13]$ ومنه $b \equiv 0[13]$ أي أن باقي قسمة b على 13 هو 0

التمرين 82: دورة 2010 الموضوع 2

1- أ- تبيان أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7.

لدينا: (1).... $7x + 65y = 2009$ تكافئ $65y = 2009 - 7x$ وتكافئ $65y = 7(287 - x)$ وتكافئ $y \equiv 0[7]$ لأن 65 أولي مع 7
 الكتابة $y \equiv 0[7]$ تعني أن y مضاعف للعدد 7.
ب- حل المعادلة (1).

من الجواب السابق لدينا: y مضاعف للعدد 7 ومنه $y = 7k$ حيث k عدد صحيح
 بتعويض قيمة y في المعادلة $65y = 7(287 - x)$ نجد: $x = 65k + 287$
 ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (-65k + 287; 7k)$ مع أن k عدد صحيح.
2- دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9.

لدينا: $2^0 \equiv 1[9]$ ، $2^1 \equiv 2[9]$ ، $2^2 \equiv 4[9]$ ، $2^3 \equiv 8[9]$ ، $2^4 \equiv 7[9]$ ، $2^5 \equiv 5[9]$ و $2^6 \equiv 1[9]$
 بواقي قسمة 2^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

| | | | | | | |
|--------------|------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $n =$ | $6k$ | $6k + 1$ | $6k + 2$ | $6k + 3$ | $6k + 4$ | $6k + 5$ |
| $2^n \equiv$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 7 | 5 |

3- تعيين قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9.

لدينا: العدد $2^{6n} + 3n + 2$ يقبل القسمة على 9 معناه $2^{6n} + 3n + 2 \equiv 0[9]$

$$2^{6n} + 3n + 2 \equiv 0[9] \text{ تكافئ } 1 + 3n + 2 \equiv 0[9] \text{ أي } 3n \equiv -3[9]$$

$$\text{أي } n \equiv 2[3] \text{ إذن: } n \equiv 3p + 2 \text{ حيث } p \text{ عدد طبيعي}$$

4- أ) التحقق أن u_n يقبل القسمة على 9.

$$\text{لدينا: } u_n = 2^{6n} - 1$$

$$\text{من الجواب 2) لدينا: } 2^{6n} \equiv 1[9] \text{ ومنه } 2^{6n} - 1 \equiv 0[9] \text{ أي } u_n \equiv 0[9]$$

إذن u_n يقبل القسمة على 9.

ب) حل المعادلة: (2).... $(7u_1)x + (u_2)y = 126567$

$$\text{لدينا: (2).... } (7u_1)x + (u_2)y = 126567 \text{ تكافئ (2).... } 7x + 65y = 2009$$

$$\text{لأن } u_1 \equiv 1[9] \text{ و } u_2 \equiv 65[9] \text{ و } 126567 \equiv 2009[9]$$

ومنه حلول المعادلة (2) هي حلول المعادلة (1).

ج) تعيين الثنائية $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$

لدينا: $(y_0 \geq 25 \text{ و } x_0 \geq 0)$ تكافئ $(7k \geq 25 \text{ و } -65k + 287 \geq 0)$ وتكافئ $\frac{25}{7} \leq k \leq \frac{287}{65}$
ومنه $k = 4$ وعليه: $(x_0; y_0) = (27; 28)$.

التمرين 83: دورة 2009 الموضوع 1

1-أ- نشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ثم إيجاد علاقة تربط بين x و y

لدينا: $(5x^2 + 6)(x + 1) = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6 = A \dots (1)$

ولدينا: $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y) \dots (2)$

من العبرتين (1) و (2) نستنتج أن: $2 + 2y = x + 1$ ومن العلاقة هي: $1 + 2y = x$

ب- حساب x و y علما أن x أولي وأصغر من 12.

لدينا: x ومحصور بين 7 و 12 وعدد أولي وعليه قيم x هي: 7 أو 11

باستعمال العلاقة $1 + 2y = x$ نجد: $y = 3$ من أجل $x = 7$

نجد: $y = 5$ من أجل $x = 11$

كتابة تبعاً لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

الحالة 1: من أجل $x = 7$ و $y = 3$ نجد: $A = (5 \cdot 7^2 + 6)(2 + 2 \cdot 3) = 2008$

الحالة 1: من أجل $x = 11$ و $y = 5$ نجد: $A = (5 \cdot 11^2 + 6)(2 + 2 \cdot 5) = 7332$

2-أ- تعيين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

لدينا: $584 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 73$

من خلال التحليل السابق نستنتج أن العددين التي مربعاتها تقسم 584 هما 1 و 2

ب- تعيين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق: $\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$

نفرض أن: $\text{PGCD}(a; b) = d$ ومنه $a = d \cdot a'$ و $b = d \cdot b'$ (خاصية) حيث $\text{PGCD}(a'; b') = 1$

$$\begin{cases} a' + b' = \frac{32}{d} \\ a'^2 + b'^2 = \frac{584}{d^2} \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \text{ ومنه الجملة}$$

من الجملة الأخيرة نستنتج أن: $d = 1$ أو $d = 2$

$$\begin{cases} b' = 32 - a' \\ a'^2 - 32a' + 220 = 0 \end{cases} \text{ ومعناه } \begin{cases} a' + b' = 32 \\ a'^2 + b'^2 = 584 \end{cases} \text{ الحالة 1: } d = 1 \text{ ومعناه}$$

الحلول هي: $(10; 22)$ أو $(22; 10)$ مرفوض لأن 10 و 22 ليسا أوليان فيما بينهما.

$$\begin{cases} b' = 16 - a' \\ a'^2 - 16a' + 55 = 0 \end{cases} \text{ ومعناه } \begin{cases} a' + b' = 16 \\ a'^2 + b'^2 = 146 \end{cases} \text{ الحالة 1: } d = 2 \text{ ومعناه}$$

الحلول هي: (11;5) مقبول أو (5;11) مرفوض لأن 5 أصغر من 11
ومنه قيم العددين a و b هما: $(a; b) = (22; 10)$

التمرين 84: دورة 2008 الموضوع 2

1-أ) تبين أن المعادلة (E) تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2 .

لدينا: (E) $3x - 21y = 78$ ولدينا $\text{PGCD}(3; 21) = 3$

المعادلة (E) $3x - 21y = 78$ تقبل حلول لأن 3 يقسم 78

ب) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من \mathbb{Z}^2 حلاً للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$

المعادلة (E) تكافئ المعادلة (E') $x - 7y = 26$ وتكافئ $x = 26 + 7y$

المعادلة $x = 26 + 7y$ تعني أن $x \equiv 26[7]$ ومنه $x \equiv 5[7]$ لأن $26 \equiv 5[7]$

استنتاج حلول المعادلة (E).

من الجواب السابق لدينا: $x \equiv 5[7]$ ومنه $x = 7k + 5$ حيث k عدد صحيح

بتعويض قيمة $x = 7k + 5$ في المعادلة (E') $x - 7y = 26$ نجد: $y = k - 3$

ومنه الحلول هي الثنائيات $(x; y)$ حيث: $(x; y) = (7k + 5; k - 3)$ مع أن k عدد صحيح.

2-أ) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7.

لدينا: $5^0 \equiv 1[7]$ ، $5^1 \equiv 5[7]$ ، $5^2 \equiv 4[7]$ ، $5^3 \equiv 6[7]$ ، $5^4 \equiv 2[7]$ ، $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية ودورها 6 وحسب الجدول التالي

| n = | 6p | 6p + 1 | 6p + 2 | 6p + 3 | 6p + 4 | 6p + 5 |
|--------------|----|--------|--------|--------|--------|--------|
| $5^n \equiv$ | 1 | 5 | 4 | 6 | 32 | 3 |

ب- تعيين الثنائيات $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 حلول المعادلة (E) وتحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$

لدينا حلول المعادلة (E) حيث $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 هي: $(x; y) = (7k + 5; k - 3)$ حيث k أكبر من 3

نضع: $k' = k - 3$ حيث k' عدد طبيعي

ومنه: حلول المعادلة (E) حيث $(x; y)$ من \mathbb{N}^2 هي: $(x; y) = (7k' + 21; k')$

ولدينا من جهة أخرى $5^x + 5^y \equiv 3[7]$ ومنه $5^{7k'+21} + 5^{k'} \equiv 3[7]$

ومنه: $5^{7k'+21} + 5^{k'} \equiv 3[7]$ تكافئ $5^{6k'} \cdot 5^{6.4+2} + 5^{k'} \equiv 3[7]$

وتكافئ $5^{k'+1} \equiv 3[7]$ لأن $5^{6k'} \equiv 1[7]$ و $5^{6.4+2} \equiv 4[7]$

ومنه: $k' + 1 = 6p + 5$ ومنه $k' = 6p + 4$

بعد تعويض قيمة k' نجد $(x; y) = (42p + 54; 6p + 4)$ حيث p عدد طبيعي.