

<https://www.facebook.com/rachid.bouher.71>

Université Ibno Zohr

Année Univirsitaire 2013-2014

Faculté des sciences

Département de Mathématique

Agadir

Examen Algèbre ,(SM4) (session normale) (*)

N.B: les parties A, B et C sont indépendentes Il est obligatoire de les rédiger sur trois copies séparées

parie A (12 pts)

A-1)

Monter que si H est un hyperpaln d'un espace vectoriel E , alors il existe une droite D telle que $E=H\oplus D$

A-2)

Prouver que $H_0 = \{QX, Q \in \mathbb{R}[X]\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$, et trouver la droite D verifiant $\mathbb{R}[X] = H_0 \oplus D$ (indécation : effectuer une division euclidienne par X)

A-3)

On munit l'espace $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

i) On considère la forme linéaire ϕ définie par $P \mapsto \phi(P) = P(0)$. Monrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\phi(P) = \langle P, Q \rangle$, pour tout polynôme P . Quel résultat dans le cas euclidienne est mise en défaut par cet exemple ?

ii) Soit $n \geq 1$, Montrer qu'il existe un unique Q de degré n tel que $\phi(P) = \langle P, Q \rangle$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

iii) Monter que $P \mapsto \varphi(P) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P(\frac{1}{k})}{k^2}$ défini bien une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$

parie B (16 pts)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel , On appelle matrice de Gram d'une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E , la matrice carrée d'ordre n , $G = (\langle x_i, x_j \rangle)_{i \leq i, j \leq n}$. Notons par $g(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de G on suppose dans toute la suite que la famille $\{x_0, \dots, x_n\}$ est libre .

1.) Monter qu'il existe une matrice inversible P d'ordre n telle que $G = {}^t P P$.
2.) En déduire que $g(x_1, \dots, x_n) > 0$.
3.) Montrer que pour $n = 2$, $g(x_1, x_2) \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2$. On suppose que $n \geq 2$, et soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base orthonormée de $F = \text{vect}\{x_0, \dots, x_n\}$ déduite par le procédé de Gram-Schmidt avec la condition $\langle x_k, e_k \rangle > 0$, $1 \leq k \leq n$ on rappelle que $e_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$, $1 \leq k \leq n$ où $y_1 = x_1$, $y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j \rangle e_j$, $2 \leq k \leq n$
4.) Montrer que la matrice de passage A , de $(e_j)_{1 \leq i \leq n}$ à $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est triangulaire en précisant sa diagonale .
5.) Montrer que $g(x_1, \dots, x_n) = \det(A^2) = \prod_{k=1}^n \|y_k\|^2$
6.) Si x et y sont deux vecteurs nuls de E on note par $\widehat{(x, y)}$ la mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle que font ces deux vecteurs , on rappelle que $\cos(\widehat{(x, y)}) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$ Montrer que $g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=2}^n \cos^2(\widehat{(x_k, e_k)}) \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$.
7.) Monter que pour tout $x \in E$ $d(x, F) = \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_n, x)}{g(x_1, \dots, x_n)}}$

8.) Montrer que la projection de x sur F est donnée par le vecteur $x_F = \sum_{j=1}^n \frac{g_{j,x}(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} x_j$,
où $g_{j,x}(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant de la matrice déduite de G , en remplaçant sa colonne j par :

$$\begin{pmatrix} \langle x_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle x_n, x \rangle \end{pmatrix}$$

partie C (12 pts)

C1) soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^t P P$

C2) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et λ_1 sa plus grande valeur propre

i) montrer que pour tout $x \in E$ $\langle u(x), x \rangle \leq \lambda_1 \|x\|^2$.

soit $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E . $A = (a_{i,j})$ la matrice de u dans β on suppose que pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} \geq 0$. soit

$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, et $|x| = \sum_{k=1}^n |x_k| e_k$.

ii) Montrer que pour tout $x \in E$ $\langle u(x), x \rangle \leq \langle u(|x|), |x| \rangle$.

iii) Montrer que si x est vecteur propre associé à λ_1 alors $|x|$ l'est aussi.

Correction

Correction d'examen d'algèbre (SM4) (session normale)

Parite A)

A1) : Montrons que si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E alors il existe une droite vectoriel D telle que $E = H \oplus D$, on a $H = \ker(\varphi)$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E il existe donc un vecteur a dans E non nul tel que $\varphi(a) \neq 0$ on notons $D = \mathbb{K}a$ la droite dirigée par a on a alors : $E = H \oplus D$ en effet, si $x \in H \cap D$ il existe un scalaire λ tel que $x = \lambda a$ et $\varphi(x) = \lambda \varphi(a)$ nous donne $\lambda = 0$ on a donc $E = H \oplus D = \{0\}$. De plus pour tout vecteur $x \in E$ le vecteur $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ est dans $H = \ker(\varphi)$ et avec $x = y + \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ on en déduit que $x \in H + D$ on a donc $E = H + D$ et $E = H \oplus D$.

Réciproquement un sous-espace vectoriel H de E supplémentaire d'une droite D est le noyau de la forme linéaire φ qui associe à tout vecteur x de E sa projection sur D parallèlement à H , c'est donc un hyperplan.

A2) : Montrons que H_0 est un hyperplan : il suffit de montrer que H_0 est le noyau d'une forme linéaire ; considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto \varphi(P) = P(0) \end{aligned}$$

on a $\forall P \in H_0$, $\varphi(P) = 0$ donc $H_0 \subset \ker(\varphi)$ et si $P \in \ker(\varphi)$ donc $\varphi(P) = 0$ et donc 0 est racine de P donc $(X - 0) = X$ divise P donc $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = XQ(X)$ se qui résulte que $P \in H_0$, d'où $\ker(\varphi) \subset H_0$

conclusion : $H_0 = \ker(\varphi)$ mais φ c'est une forme linéaire alors H_0 est un hyperplan

A3

i) supposons l'existence d'un tel polynôme Q et considérons $P(X) = XQ(X)$
on a $0 = P(0) = \langle P, Q \rangle = \int_0^1 tQ(t)^2 dt$ et puisque l'intégral d'une fonction positive est nulle ssi cette fonction est nulle on a alors $tQ(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$ en particulier pour tout $t \in]0, 1]$ donc $Q(t)$ admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul, absurde, donc le résultat.

ii) ϕ étant une forme linéaire donc il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que cette forme linéaire corresponde au produit scalaire avec Q , supposons que $\deg(Q) < n$ alors $\deg(P(X) = XQ(X)) \leq n$ donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $0 = P(0) = \langle P, Q \rangle = \int_0^1 tQ(t)^2 dt$, et puisque l'intégral d'une fonction positive est nulle ssi cette fonction est nulle on a alors $tQ(t) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$ en particulier pour tout $t \in]0, 1]$ donc $Q(t)$ admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul, absurde

conclusion : il existe un unique polynôme Q de degré n tel que $\phi(P) = \langle P, Q \rangle$

iii) il est clair que si $P, Q \in E = \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(P + \lambda Q) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$ et par la convergence de la série $\varphi(P)$, φ est bien linéaire de E à valeurs réelles donc c'est une forme linéaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

Parite B) !!!

1.) on a G est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}$$

soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\{x_1 \dots x_n\}$ le procédé de Gram-Schmidt nous permet de construire une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $1 \leq p \leq n$ et dans cette base on peut écrire $x_i = \sum_{k=1}^p a_{ki} e_k$ pour i, j compris entre 1 et p on a alors $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^p a_{ki} a_{kj} = (a_{1i}, \dots, a_{pi})^t (a_{1j}, \dots, a_{pj})$ soit

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

et donc on a $G = {}^t P P$ et comme la famille $\{x_1 \dots x_n\}$ est libre alors $n = p$ donc $P \in Gl_n(\mathbb{R})$

2.) puisque $\{x_1 \dots x_n\}$ est libre, il est clair donc que la matrice G est symétrique réelle définie positive, en effet : soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^t X G X = \|PX\|^2$ donc ${}^t X G X \geq 0$ et si ${}^t X G X = 0$ alors $\|PX\|^2 = 0$ puis $X = 0$ car $P \in Gl_n(\mathbb{R})$, cela résulte que $\det(G) > 0$ autrement dit $g(x_1 \dots x_n) > 0$
3.) pour $n = 2$ c'est le cas de deux vecteurs, pour plus de clarté de rédaction on note $(x_1 = x \text{ et } x_2 = y)$ on a :

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix} = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$$

et la condition $g(x, y) \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, les vecteurs x et y sont liés est tout simplement le théorème de Cauchy-Schwarz si x et y sont non nuls alors en notons θ la mesure dans l'intervalle $[0, \pi]$ de l'angle que font x et y on a

$$g(x, y) = \|x\|^2 \|y\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2(\theta) \text{ et puisque } \sin^2(\theta) \leq 1 \text{ donc } g(x, y) \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

4.) avec les notations de l'énoncé la matrice A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \|y_1\| & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \|y_2\| & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & \|y_n\| \end{pmatrix}$$

5.) on a d'après la question 4)

$$A^2 = \begin{pmatrix} \|y_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ * & \|y_2\|^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * & \|y_n\|^2 \end{pmatrix}$$

A étant la matrice de passage d'une b.o.n dont la matrice est l'identité dans $\{x_1 \dots x_n\}$

dont la matrice est G donc

$$\det(G) = g(x_1 \dots x_n) = \prod_{k=1}^n \|y_k\|^2.$$

6.) on a d'après la question 5) et par la notation $x_k = \|y_k\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j \rangle e_j$ pour k comprise entre 2 et n et l'orthogonalité des e_j en déduit que

$$\|y_k\| = \langle x_k, e_k \rangle = \|x_k\| \cos(\widehat{x_k, e_k}) \text{ avec } \|y_1\| = \|x_1\| \text{ ce qui donne}$$

$$g(x_1 \dots x_n) = \prod_{k=2}^n \cos^2(\widehat{x_k, e_k}) \prod_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

7.) en notons y la projection orthogonal de x sur F on a :

$$d(x, F)^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 \text{ et pour tout } i \text{ compris entre 1 et } n,$$

$$\langle x_i, x \rangle = \langle x_i, x - y \rangle + \langle x_i, y \rangle = \langle x_i, y \rangle$$

du fait que $x - y \in F^\perp$ et $x_i \in F$ en utilisant la linéarité de déterminant par rapport à la dernière colonne en on déduit que

$$g(x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_1, y \rangle \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle & \langle x_n, y \rangle \\ \langle x, x_1 \rangle & \dots & \langle x, x_n \rangle & d(x, F)^2 + \|y\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= d(x, F)^2 g(x_1 \dots x_n) + g(x_1 \dots x_n, y)$$

$$= d(x, F)^2 g(x_1 \dots x_n)$$

le système $(x_1 \dots x_n, y)$ étant lié car $y \in F$ on a $g(x_1 \dots x_n, y) = 0$ soit

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_n, x)}{g(x_1, \dots, x_n)}}$$

8.) la projection orthogonal y de x sur F s'écrit : $y = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ (*) les coefficients a_j étant solution d'équations normales :

$$G(x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t (\langle x_1, x \rangle \dots \langle x_n, x \rangle)$$

en utilisant la formule de Cramer on obtien pour j compris entre 1 et n $a_j = \frac{g_{j,x} g(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} x_j$, puis la relation demandée en remplaçant dans (*)

Parite C**C1)**

Montrons que : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^t P P$ il s'agit du théorème spectral, en effet :

\Rightarrow) supposons que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors par théorème fondamental on peut écrire

$A = {}^t Q D Q$ avec $Q \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\lambda_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $P = \Delta Q$ on a donc ${}^t P P = {}^t (\Delta Q) \Delta Q = {}^t Q \Delta^2 Q = {}^t Q D Q = A$ car ${}^t \Delta = \Delta$ et $\Delta^2 = D$. comme $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe et $\Delta \in GL_n(\mathbb{R})$, $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $P \in GL_n(\mathbb{R})$

\Leftarrow) supposons que $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^t P P$

on a ${}^t A = {}^t ({}^t P P) = {}^t P P = A$ donc $A \in S_n(\mathbb{R})$, soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a :

${}^t X A X = {}^t X ({}^t P P) X = {}^t (P X) P X = \|P X\|^2$ donc ${}^t X A X \geq 0$ et si ${}^t X A X = 0$ alors $\|P X\|^2 = 0$ d'où $\|P X\| = 0$ puis $X = 0$ car $\ker(P) = \{0\}$ puisque $P \in GL_n(\mathbb{R})$ cela résulte que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

conclusion $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^t P P$

C1)

dans cette partie je donne juste des indications .

i) soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et λ_1 sa plus grande valeur propre on a u diagonalisable donc $u(x) = \lambda x$

on a $\langle u(x), x \rangle - \lambda_1 \|x\|^2 = (\lambda - \lambda_1) \|x\|^2$ conclure !

ii) pour $x \in E$ on a $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\langle u(x), x \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$ de même pour $\langle u(|x|), |x| \rangle$ en remplaçant x par $|x|$ puis en fait la différence $\langle u(x), x \rangle - \langle u(|x|), |x| \rangle$ conclure !

iii) on a $\langle u(|x|), |x| \rangle = \lambda_1 \| |x| \|^2$ (*), soit $|x| = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, (*) donne

$\sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) |y_i|^2 = 0$, conclure que $\lambda_i y_i = \lambda_1 y_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ et que $u(|x|) = \lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i e_i = \lambda_1 |x|$

Mise à jour le 27/01/2015